

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** 3.2. Correspondance entre comodules et G-modules  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

(iv) La co-unité  $e: C \rightarrow K$  est un morphisme d'algèbres et  $e(1) = 1$ .

(v) On a  $d(1) = 1 \otimes 1$ .

La condition (iii) permet de considérer  $C$  comme l'*algèbre affine* d'un schéma affine  $G$  sur  $K$ ; on a  $G = \text{Spec}(C)$ . Pour tout  $K_1 \in \text{Alg}_K$ , on note  $G(K_1)$  l'ensemble des points de  $G$  à valeurs dans  $K_1$ , autrement dit l'ensemble des morphismes (au sens de  $\text{Alg}_K$ ) de  $C$  dans  $K_1$ . La condition (iv) signifie que  $e$  est un élément de  $G(K)$ . Grâce aux conditions (i) et (v), la structure de cogèbre de  $C$  peut être interprétée comme un *morphisme* de  $G \times G$  dans  $G$ , qui est *associatif* et admet  $e$  pour élément neutre. Ainsi  $G$  est un *schéma affine en monoïdes* sur  $K$ ; pour tout  $K_1 \in \text{Alg}_K$ ,  $G(K_1)$  a une structure naturelle de monoïde, d'élément neutre l'image de  $e$  dans  $G(K_1)$ , image que l'on se permet de noter encore  $e$ .

On appelle *inversion* sur  $C$ , toute application  $i: C \rightarrow C$  ayant les propriétés suivantes:

a)  $i$  est un morphisme d'algèbres, et  $i(1) = 1$ .

b)  $m \circ (1_C \otimes i) \circ d$  est égal à l'endomorphisme  $c \mapsto e(c) \cdot 1$  de  $C$ .

La condition a) permet d'interpréter  $i$  comme un morphisme  $I: G \rightarrow G$  et la condition b) signifie que  $x \cdot I(x) = e$  pour tout  $x \in G(K_1)$ , et tout  $K_1$ . On voit ainsi que, si  $i$  existe, il est unique, et que c'est un isomorphisme de  $C$  sur la bigèbre opposée  $C^\circ$ . L'existence de  $i$  revient à dire que  $G$  est un *schéma en groupes*.

*Remarque.* L'application identique  $C \rightarrow C$  est un point de  $G(C)$ , appelé *point canonique*; nous le noterons  $\gamma$ . De même, on peut interpréter une inversion  $i$  de  $C$  comme un point  $\iota$  de  $G(C)$  et la condition b) signifie que  $\gamma\iota = e$ .

### 3.2. CORRESPONDANCE ENTRE COMODULES ET $G$ -MODULES

Soit  $E$  un module. Si  $K_1 \in \text{Alg}_K$ , nous noterons  $\text{End}_E(K_1)$  le monoïde des endomorphismes du  $K_1$ -module  $K_1 \otimes E$ , et  $\text{Aut}_E(K_1)$  le groupe des éléments inversibles de  $\text{End}_E(K_1)$ . Si  $K_1 \rightarrow K_2$  est un morphisme, on définit de manière évidente le morphisme correspondant de  $\text{End}_E(K_1)$  dans  $\text{End}_E(K_2)$ . Ainsi  $\text{End}_E$  est un foncteur de  $\text{Alg}_K$  dans la catégorie  $\text{Mon}$  des monoïdes; de même  $\text{Aut}_E$  est un foncteur de  $\text{Alg}_K$  dans la catégorie  $\text{Gr}$  des groupes.

Soient maintenant  $C$  et  $G = \text{Spec}(C)$  comme ci-dessus. On a vu que  $G$  définit un foncteur (noté également  $G$ ) de  $\text{Alg}_K$  dans  $\text{Mon}$ ; ce foncteur est à valeurs dans  $\text{Gr}$  si  $G$  est un schéma en groupes.

**DÉFINITION 1.** On appelle *représentation linéaire de  $G$  dans  $E$*  tout morphisme  $\rho$  du foncteur  $G$  dans le foncteur  $\text{End}_E$ .

En d'autres termes,  $\rho$  consiste en la donnée, pour tout  $K_1 \in \text{Alg}_K$ , d'un morphisme de monoïdes  $\rho(K_1): G(K_1) \rightarrow \text{End}_E(K_1)$  et, si  $K_1 \rightarrow K_2$  est un morphisme dans  $\text{Alg}_K$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(K_1) & \rightarrow & G(K_2) \\ \rho(K_1) \downarrow & & \downarrow \rho(K_2) \\ \text{End}_E(K_1) & \rightarrow & \text{End}_E(K_2) \end{array}$$

doit être commutatif.

*Terminologie.* Une représentation linéaire du monoïde  $G^o$  opposé à  $G$  est appelée une *antireprésentation* de  $G$ . Un module  $E$ , muni d'une représentation (resp. antireprésentation)  $G \rightarrow \text{End}_E$  est appelé un  $G$ -module à gauche (resp. à droite).

*Remarque.* Si  $G$  est un schéma en groupes, et si  $\rho: G \rightarrow \text{End}_E$  est une représentation linéaire de  $G$  dans  $E$ , il est clair que  $\rho$  prend ses valeurs dans le sous-foncteur  $\text{Aut}_E$  de  $\text{End}_E$ .

Notons maintenant  $G^{\text{ens}}$  le foncteur  $G$ , considéré comme foncteur à valeurs dans  $\text{Ens}$  (i.e. le composé  $\text{Alg}_K \xrightarrow{G} \text{Mon} \rightarrow \text{Ens}$ ); définissons de même  $\text{End}_E^{\text{ens}}$ . Soit  $\rho$  un morphisme de  $G^{\text{ens}}$  dans  $\text{End}_E^{\text{ens}}$ . L'image par  $\rho(C)$  du point canonique  $\gamma \in G(C)$  est un  $C$ -endomorphisme de  $C \otimes E$ , donc est définie par une application  $K$ -linéaire  $d(\rho): E \rightarrow C \otimes E$ .

PROPOSITION 1. (a) *L'application  $\rho \mapsto d(\rho)$  est une bijection de l'ensemble des morphismes de  $G^{\text{ens}}$  dans  $\text{End}_E^{\text{ens}}$  sur l'ensemble  $\text{Hom}(E, C \otimes E)$ .*

(b) *Pour que  $\rho: G^{\text{ens}} \rightarrow \text{End}_E^{\text{ens}}$  soit une représentation linéaire (resp. une antireprésentation linéaire) de  $G$  dans  $E$ , il faut et il suffit que  $d(\rho)$  munisse  $E$  d'une structure de  $C$ -comodule à droite (resp. à gauche).*

C'est là un résultat bien connu (cf. *SGAD*, exposé I). Rappelons la démonstration:

L'assertion (a) provient de ce que  $G^{\text{ens}}$  est représentable par le couple  $(C, \gamma)$ . En particulier, si  $x \in G(K_1)$ , l'image de  $x$  par  $\rho(K_1)$  est l'application  $K_1$ -linéaire de  $K_1 \otimes E$  dans  $K_1 \otimes E$  qui prolonge l'application linéaire  $(x \otimes 1_E) \circ d(\rho)$  de  $E$  dans  $K_1 \otimes E$ .

Pour (b), on peut se borner au cas des antireprésentations. Il faut d'abord exprimer que  $\rho(K_1)$  transforme  $e$  en 1 pour tout  $K_1$ , et il suffit de le faire pour  $K_1 = K$ . Cela donne la condition

$$(e \otimes 1_E) \circ d(\rho) = 1_E$$

qui est l'axiome (2) des comodules.

Il faut ensuite exprimer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 G^{\text{ens}} \times G^{\text{ens}} & \xrightarrow{\rho \times \rho} & \text{End}_E^{\text{ens}} \times \text{End}_E^{\text{ens}} \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 G^{\text{ens}} & \xrightarrow{\rho} & \text{End}_E^{\text{ens}}
 \end{array}$$

(où  $\alpha$  désigne la loi de composition de  $G$  et  $\beta$  l'*opposée* de la loi de composition de  $\text{End}_E$ ) est commutatif. Notons  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) l'homomorphisme de  $C$  dans  $C \otimes C$  qui applique  $x \in C$  dans  $x \otimes 1$  (resp.  $1 \otimes x$ ); on a  $\gamma_1, \gamma_2 \in G(C \otimes C)$ . De plus, il est immédiat que le foncteur  $G^{\text{ens}} \times G^{\text{ens}}$  est représentable par  $(C \otimes C, \gamma_1 \times \gamma_2)$ . Il suffit donc d'exprimer que les deux images de  $\gamma_1 \times \gamma_2$  dans  $\text{End}_E(C \otimes C)$  coïncident. Or l'image de  $\gamma_1 \times \gamma_2$  dans  $G(C \otimes C)$  est le point donné par  $d: C \rightarrow C \otimes C$ ; son image dans  $\text{End}_E(C \otimes C)$ , identifié à  $\text{Hom}(E, C \otimes C \otimes E)$  est donc  $(d \otimes 1_E) \circ d(\rho)$ . Il faut ensuite calculer l'image de  $\gamma_1 \times \gamma_2$  par  $G \times G \xrightarrow{\rho \times \rho} \text{End}_E \times \text{End}_E \xrightarrow{\beta} \text{End}_E$ . On trouve, après un calcul sans difficultés [cf. ci-après] l'élément  $(1_C \otimes d(\rho)) \circ d(\rho)$ . La commutativité du diagramme considéré équivaut donc à l'axiome (1) des comodules, ce qui achève de démontrer la proposition.

[Voici le «calcul sans difficultés» en question. Il s'agit de déterminer l'image  $\varphi \in \text{End}_E(C \otimes C)$  de  $\gamma_1 \times \gamma_2$  par  $\beta \circ (\rho \times \rho)$ . Si  $\varphi_1$  (resp.  $\varphi_2$ ) est l'image de  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) par  $\rho$ , on a  $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$  (puisque  $\beta$  est l'*opposée* de la loi de composition). De plus,  $\varphi_i$  est caractérisé par le fait de prolonger l'application  $K$ -linéaire  $(\gamma_i \otimes 1_E) \circ d(\rho): E \rightarrow C \otimes E \rightarrow C \otimes C \otimes E$ . Soit alors  $x \in E$ , et posons:

$$d(\rho)(x) = \sum c_i \otimes x_i, \quad d(\rho)(x_i) = \sum c_{ij} \otimes x_{ij}.$$

On a:

$$\varphi_1(x) = (\gamma_1 \otimes 1_E)(\sum c_i \otimes x_i) = \sum c_i \otimes 1 \otimes x_i.$$

De même:

$$\varphi_2(x_i) = \sum 1 \otimes c_{ij} \otimes x_{ij}.$$

D'où:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \varphi_2(\varphi_1(x)) = \sum \varphi_2(c_i \otimes 1 \otimes x_i) \\
 &= \sum (c_i \otimes 1) \cdot \sum 1 \otimes c_{ij} \otimes x_{ij} \quad (\varphi_2 \text{ étant } C \otimes C\text{-linéaire}) \\
 &= \sum c_i \otimes c_{ij} \otimes x_{ij}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} ((1_C \otimes d(\rho)) \circ d(\rho))(x) &= (1_C \otimes d(\rho)) \left( \sum c_i \otimes x_i \right) \\ &= \sum c_i \otimes c_{ij} \otimes x_{ij} . \end{aligned}$$

En comparant, on voit bien que l'on a

$$\varphi = (1_C \otimes d(\rho)) \circ d(\rho) .]$$

*Remarque.* La proposition précédente permet donc d'identifier les *G-modules à gauche* aux *C-comodules à droite*, et inversement. [Il est bien triste d'avoir ainsi à échanger sa droite et sa gauche, mais on n'y peut rien. Toutefois, lorsque  $G$  est un schéma en *groupes*, on peut, au moyen de l'inverse, transformer canoniquement tout module à droite en un module à gauche.]

*Exemple.* La représentation *triviale*  $\rho = 1$  de  $G$  dans un module  $E$  correspond à la structure de comodule  $x \mapsto 1 \otimes x$  sur  $E$ . Pour  $E = K$  on obtient le comodule *unité*.

## OPÉRATIONS SUR LES COMODULES

### a) *Produit tensoriel.*

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des  $C$ -modules (à gauche, par exemple), on a défini au n° 1.2 une structure de  $C \otimes C$ -comodule sur  $E_1 \otimes E_2$ . Comme  $m: C \otimes C \rightarrow C$  est un morphisme de cogèbres, on déduit de là *une structure de C-comodule sur  $E_1 \otimes E_2$* . Du fait que  $m$  est commutative, cette structure ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit  $E_1$  et  $E_2$ . Elle correspond (via la prop. 1) à l'opération évidente de *produit tensoriel de G-modules* (la vérification de ce fait est immédiate).

### b) *Contragrédiente.*

Supposons que  $C$  admette une inversion, et soit  $E$  un  $C$ -comodule à gauche qui est projectif de type fini comme module. En utilisant les isomorphismes

$$\text{Hom}(E, C \otimes E) \simeq \text{Hom}(E \otimes E', C) \simeq \text{Hom}(E', C \otimes E')$$

on définit sur  $E'$  une structure de  $C$ -module à droite. En utilisant l'inversion  $i$ , on transforme cette structure en une structure de  $C$ -comodule à gauche, dite *contragrédiente* de celle donnée sur  $E$  et notée  $\check{E}$ . Elle correspond (via la prop. 1) à l'opération évidente de «*contragrédiente d'une représentation*». [L'hypothèse faite sur  $E$  sert à assurer que le foncteur «dual» commute au foncteur «extension des scalaires».]