

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** 2.5. OÙ L'ON CARACTÉRISE \$Com\_C^f\$  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

2) Il n'est pas indispensable de passer aux modules pour prouver le lemme 1. On remarque d'abord (cf. n° 1.4, Exemple 2) que  $F$  est isomorphe à un sous-comodule de  $C_E \otimes F$ , i.e. de  $(C_E)^n$ , avec  $n = \text{rang}(F)$ . D'autre part,  $C_E$  est isomorphe, comme comodule, à un quotient de  $E \otimes E'$ , c'est-à-dire de  $E^m$ , où  $m = \text{rang}(E)$ . D'où le résultat.

### *Exemples*

- 1) La sous-catégorie de  $\text{Com}_C^f$  formée des *objets semi-simples* correspond à la *plus grande sous-cogèbre semi-simple* de  $C$  (la somme de toutes les sous-cogèbres simples).
- 2) Supposons  $C$  semi-simple, et soit  $(E_i)_{i \in I}$  un ensemble de représentants des classes de  $C$ -comodules simples. Posons  $C_i = C_{E_i}$ , de sorte que  $C$  est somme directe des cogèbres simples  $C_i$ . Si  $J$  est une partie de  $I$ ,  $C_J = \sum_{i \in J} C_i$  est une sous-cogèbre de  $C$ , et toute sous-cogèbre de  $C$  s'obtient de cette manière, et de façon unique. La sous-catégorie correspondant à  $C_J$  est formée des comodules isomorphes à des sommes directes finies des  $E_i, i \in J$ .

### 2.5. OÙ L'ON CARACTÉRISE $\text{Com}_C^f$

Soit  $M$  une catégorie abélienne munie des deux structures suivantes:

- a)  $M$  est une catégorie *sur*  $K$ ; cela signifie que, si  $E, F$  sont des objets de  $M$ ,  $\text{Hom}^M(E, F)$  est muni d'une structure de  $K$ -espace vectoriel, la composition des morphismes étant bilinéaire.
- b) On se donne un foncteur  $v: M \rightarrow \text{Vect}_K^f$  de  $M$  dans la catégorie des  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie.

On fait les *hypothèses* suivantes:

- (i) Le foncteur  $v$  est  *$K$ -linéaire*, i.e. pour tout  $E, F \in M$ , l'application  $v: \text{Hom}^M(E, F) \rightarrow \text{Hom}(v(E), v(F))$  est  $K$ -linéaire.
- (ii) Le foncteur  $v$  est *exact* et *fidèle*.

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une cogèbre  $C$  sur  $K$  (et une seule, à isomorphisme près) telle que  $M$  soit équivalente à  $\text{Com}_C^f$ , cette équivalence transformant le foncteur  $v$  en le foncteur  $C$ -module  $\mapsto$  espace vectoriel sous-jacent.*

[Ici, il est nécessaire d'interpréter  $M$  comme une petite catégorie, ou en tout cas de supposer qu'il existe un ensemble de représentants pour les classes d'isomorphisme d'objets de  $M$ .]

Avant de commencer la démonstration, remarquons que les hypothèses (i) et (ii) entraînent que  $\text{Hom}^M(E, F)$  est un espace vectoriel *de dimension finie* pour tout  $E, F \in M$ . De plus, un sous-objet d'un objet  $E$  de  $M$  est connu lorsqu'on connaît le sous-espace vectoriel correspondant de  $v(E)$ ; l'ensemble des sous-objets de  $E$  s'identifie ainsi à un sous-ensemble réticulé de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $v(E)$ ; en particulier,  $E$  est *de longueur finie*. On a des résultats analogues pour les objets quotients.

D'autre part, si  $E \in M$ , nous noterons  $M_E$  la sous-catégorie pleine de  $M$  formée des quotients  $F/G$ , où  $F$  est isomorphe à un sous-objet d'un  $E^n$  ( $n$  entier  $> 0$  quelconque).

Enfin, si  $E$  est un objet de  $M$ , et si  $X$  est une partie de  $V(E)$ , nous dirons que  $X$  engendre  $E$  si tout sous-objet  $F$  de  $E$  tel que  $v(F) \supset X$  est égal à  $E$ .

### *Démonstration du théorème 3*

#### a) *Le cas fini; une majoration.*

C'est celui où il existe un objet  $E$  de  $M$  tel que  $M_E = M$ . Soit  $n = \text{rang}_K v(E)$ .

LEMME 2. *Soit  $F$  un objet de  $M$  pouvant être engendré par un élément (cf. ci-dessus). On a*

$$\text{rang}_K v(F) \leq n^2.$$

Par hypothèse, on peut écrire  $F$  comme quotient  $F_1/F_2$ , où  $F_1$  est isomorphe à un sous-objet d'un  $E^m$ , pour  $m$  convenable. Soit  $x \in v(F)$  engendrant  $F$  et soit  $x_1$  un élément de  $v(F_1)$  dont l'image dans  $v(F)$  est  $x$ . Soit  $G$  le plus petit sous-objet de  $E^m$  tel que  $v(G)$  contienne  $x_1$ . On a  $G \subset F_1$  et l'image de  $G$  dans  $F = F_1/F_2$  est égale à  $F$ . Il suffit donc de prouver que  $\text{rang}_K v(G) \leq n^2$ . Si  $m \leq n$ , c'est évident. Supposons donc que  $m > n$ . On a  $x_1 \in v(G) \subset v(E^m) = v(E)^m$ . Soient  $y_1, \dots, y_m$  les composantes de  $x_1$ , considéré comme élément de  $v(E)^m$ . Puisque  $m > n$ , il existe des  $a_i \in K$ , non tous nuls, tels que  $\sum a_i y_i = 0$ . Or les  $a_i$  définissent un morphisme surjectif  $E^m \rightarrow E$ ; si  $N$  est le noyau de ce morphisme, on a  $N \simeq E^{m-1}$ , comme on le voit facilement. D'autre part, on a  $x_1 \in v(N)$ , d'où  $G \subset N$  puisque  $x_1$  engendre  $G$ . On a donc obtenu un plongement de  $G$  dans  $E^{m-1}$ ; d'où le lemme, en raisonnant par récurrence sur  $m$ .

#### b) *Le cas fini; construction d'un générateur projectif.*

Les hypothèses étant les mêmes que ci-dessus, on choisit un objet  $P$  de  $M$  pouvant être engendré par un élément  $x \in v(P)$ , et tel que  $v(P)$  soit *de rang maximum* parmi ceux jouissant de cette propriété. C'est possible en vertu du Lemme 2.

LEMME 3. (i) *Le couple  $(P, x)$  représente le foncteur  $v$ .*

(ii)  *$P$  est un générateur projectif de  $M$ .*

Il suffit de prouver (i); l'assertion (ii) en résultera, puisque le foncteur  $v$  est exact et fidèle.

Soient donc  $F \in M$ , et  $y \in v(F)$ . Il nous faut prouver l'existence et l'unicité d'un morphisme  $f: P \rightarrow F$  transformant  $x$  en  $y$ . L'unicité provient de ce que  $x$  engendre  $P$ . Pour démontrer l'existence, soit  $Q$  le plus petit sous-objet de  $P \times F$  tel que  $v(Q)$  contienne  $(x, y)$ . Le morphisme  $Q \rightarrow F$  induit par  $\text{pr}_1$  est surjectif, du fait que  $P$  est engendré par  $x$ . On a donc

$$\text{rang}_K v(Q) \geq \text{rang}_K v(P) ;$$

mais le caractère maximal de  $v(P)$  entraîne qu'il y a égalité; le morphisme  $Q \rightarrow P$  est donc un isomorphisme. En composant son inverse avec la seconde projection  $Q \rightarrow F$ , on obtient un morphisme  $f$  ayant la propriété voulue.

c) *Le cas fini; fin de démonstration.*

Soit  $A$  l'algèbre des endomorphismes de  $P$ . C'est une  $K$ -algèbre de dimension finie. Le lemme suivant est bien connu:

LEMME 4. *Il existe un foncteur  $\varphi: \text{Mod}_{A^o}^f \rightarrow M$  et un seul (à isomorphisme près) qui soit exact à gauche et transforme  $A$  (considéré comme  $A$ -module à droite) en  $P$ . Ce foncteur est une équivalence de catégories.*

Indiquons brièvement la démonstration. Pour chaque  $A$ -module à droite  $H$  de rang fini, on choisit une *présentation finie* de  $H$ :

$$A^p \xrightarrow{\alpha} A^q \rightarrow H \rightarrow 0$$

où  $\alpha$  est une  $p \times q$ -matrice à coefficients dans  $A$ . Cette matrice définit un morphisme  $P^p \rightarrow P^q$  et l'on prend pour  $\varphi(H)$  le *conoyau* de ce morphisme. On prolonge de façon évidente  $\varphi$  en un foncteur  $\text{Mod}_{A^o}^f \rightarrow M$  et l'on vérifie qu'il a la propriété voulue. On note généralement ce foncteur  $H \mapsto H \otimes_A P$ . C'est un adjoint du foncteur  $F \mapsto \text{Hom}^M(P, F)$ . Son unicité est immédiate. Le fait que ce soit une équivalence résulte de ce que  $P$  est un générateur projectif de  $M$ .

De plus, l'équivalence  $\varphi: H \mapsto H \otimes_A P$  transforme le foncteur «espace vectoriel sous-jacent à un  $A$ -module» en un foncteur isomorphe à  $v$  (en effet le premier foncteur est représentable par  $A$ , le second par  $P$ , et  $\varphi$  transforme  $A$  en  $P$ ). On peut donc prendre pour cogèbre la cogèbre duale de l'algèbre  $A$ , et toutes les conditions sont vérifiées.

d) *Cas général.*

Soit  $X$  l'ensemble des sous-catégories  $N$  de  $M$  telles qu'il existe  $E \in M$  avec  $N = M_E$ . L'ensemble  $X$  est ordonné filtrant puisque  $M_{E_1 \times E_2}$  contient  $M_{E_1}$  et  $M_{E_2}$ . Si  $N \in X$ , soit comme ci-dessus  $(P_N, x_N)$  un couple représentant la restriction à  $N$  du foncteur  $v$ , et soit  $A_N = \text{End}(P_N)$ . Si  $N_1 \supset N_2$ , il existe un unique morphisme  $P_{N_1} \rightarrow P_{N_2}$  transformant  $x_{N_1}$  en  $x_{N_2}$ ; on voit aisément que ce morphisme identifie  $P_{N_2}$  au plus grand quotient de  $P_{N_1}$  appartenant à  $N_2$ . En particulier, tout endomorphisme de  $P_{N_1}$  définit par passage au quotient un endomorphisme de  $P_{N_2}$ . D'où un homomorphisme  $A_{N_1} \rightarrow A_{N_2}$  qui est surjectif. Si  $A$  désigne l'algèbre profinie limite projective des  $A_N$ , pour  $N \in X$ , il est alors clair que la cogèbre duale de  $A$  répond à la question.

Quant à l'*unicité* de cette cogèbre (ou de l'algèbre  $A$ ), elle provient de la remarque suivante: *A est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes du foncteur v*, munie de la topologie de la convergence simple.

*Remarque.* Il est probablement possible d'éviter le passage par le cas  $M = M_E$ , en utilisant le théorème de Grothendieck disant qu'un foncteur exact à droite est proreprésentable: on appliquerait ce théorème à  $v$ , d'où  $P \in \text{Pro } M$  représentant  $v$  et on obtiendrait  $A$  comme l'algèbre des endomorphismes de  $P$ .

### § 3. BIGÈBRES

#### 3.1. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

(Dans ce n°, ainsi que dans le suivant, on ne suppose pas que  $K$  soit un corps.)

Rappelons (cf. *Alg. III*) qu'une *bigèbre* sur  $K$  est un  $K$ -module  $C$  muni d'une structure de cogèbre  $d: C \rightarrow C \otimes C$  et d'une structure d'algèbre  $m: C \otimes C \rightarrow C$ , ces structures vérifiant l'axiome suivant:

(i) Si l'on munit  $C \otimes C$  de la structure d'algèbre produit tensoriel de celle de  $C$  par elle-même,  $d$  est un homomorphisme d'algèbres de  $C$  dans  $C \otimes C$ .

Cet axiome équivaut d'ailleurs à:

(i') L'application  $m: C \otimes C \rightarrow C$  est un morphisme de cogèbres (pour la structure naturelle de cogèbre de  $C \otimes C$ ).

Dans tout ce qui suit, nous réservons le terme de *bigèbres* à celles vérifiant les conditions suivantes:

(ii) La cogèbre  $(C, d)$  possède une co-unité  $e: C \rightarrow K$ .

(iii) L'algèbre  $(C, m)$  est commutative, associative, et possède un élément unité 1.