Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: 2.2. Dualité entre cogèbres et algèbres profinies

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

2) Une sous-cogèbre de rang 1 (sur K) de C a pour base un élément non nul x tel que $d(x) = x \otimes x$; on a alors $e(x) = 1$.

3) Si D est une cogèbre, et si $f: D \to C$ est un morphisme de cogèbres, $f(D)$ est une sous-cogèbre de C.

4) Soit E un comodule sur C, soit $(v_i)_{i \in I}$ une base de E, et soient $c_{ij} \in C$ tels que $d_E(v_i) = \sum c_{ij} \otimes v_j$, cf. n° 1.2, Remarque 3. Il résulte de la formule (1′) du n° 1.2 que le *sous-espace vectoriel C_E engendré par les c_{ij} est une sous-cogèbre de C.* Cette sous-cogèbre ne dépend pas du choix de la base (v_i), car c'est l'image de l'application $E \otimes E' \to C$ associée à d_E (cf. n° 1.2, Remarque 2). On peut aussi caractériser C_E comme le plus petit sous-espace vectoriel X de C tel que $\operatorname{Im}(d_E) \subset X \otimes E$.

Noter que, si D est une sous-cogèbre de C contenant C_E, le coproduit d_E applique E dans $D \otimes E$, donc munit E d'une structure de *D-comodule*; inversement, tout D-comodule peut évidemment être considéré comme un C-comodule.

5) On peut appliquer la construction précédente en prenant pour E *un sous-comodule de C*. Dans ce cas, *la sous-cogèbre C_E contient E*. En effet, C_E est l'image de $E \otimes E' \to C$; d'autre part la restriction de e à E est un élément e_E de E' et l'on vérifie tout de suite que, si $x \in E$, l'image de $x \otimes e_E$ dans C est égale à x.

6) Supposons C de rang fini (sur K), et soit A l'algèbre duale (cf. n° 1.1, Exemple 3). Les sous-cogèbres de C correspondent bijectivement (par dualité) aux algèbres quotients de A (donc aussi aux idéaux bilatères de A).

THÉORÈME 1. *La cogèbre C est réunion filtrante croissante de ses sous-cogèbres de rang fini.*

Il suffit de prouver que tout sous-espace vectoriel W de rang fini de C est contenu dans une sous-cogèbre de rang fini. Or, d'après le corollaire à la prop. 3 du n° 1.4, il existe un sous-comodule E de C qui est de rang fini et contient W. La sous-cogèbre C_E associée à E (cf. Exemple 4) répond à la question: elle est évidemment de rang fini, et elle contient E (cf. Exemple 5), donc W. Cqfd.

2.2. DUALITÉ ENTRE COGÈBRES ET ALGÈBRES PROFINIES

DÉFINITION 2. *On appelle algèbre profinie une algèbre topologique séparée, complète, possédant une base de voisinages de 0 formée d'idéaux bilatères de codimension finie.*

Il revient au même de dire qu'une telle algèbre est limite projective filtrante d'algèbres de rang fini; d'où le nom de «profini».

Soit maintenant C une cogèbre, et soit $A = C'$ son dual. La structure de cogèbre de C définit sur A une structure d'algèbre (cf. *Alg.* III); d'autre part, on peut munir A de la topologie de la convergence simple sur C (K étant lui-même muni de la topologie discrète).

PROPOSITION 1. (a) *L'algèbre topologique* $A = C'$ *est une algèbre profinie. Les idéaux bilatères ouverts de* A *sont les orthogonaux des sous-cogèbres de rang fini de* C.

(b) *Inversement, toute algèbre profinie qui est associative et possède un élément unité est la duale d'une cogèbre possédant une co-unité, définie à isomorphisme unique près.*

Pour prouver (a), on remarque que $C = \varinjlim . X$, où X parcourt l'ensemble ordonné filtrant des sous-cogèbres de C de rang fini (cf. th. 1). On a alors $A = \varprojlim . X'$ et les X' sont des algèbres de rang fini. Le noyau de $A \to X'$ est l'orthogonal $\mathfrak{a}_X$ de X dans A; c'est un idéal bilatère ouvert de codimension finie. Inversement, soit $\mathfrak{a}$ un tel idéal de A, et soit X son orthogonal dans C. On a $X = (A/\mathfrak{a})'$; la structure d'algèbre de $A/\mathfrak{a}$ définit sur X une structure de cogèbre, et on en déduit que X est une sous-cogèbre de C.

L'assertion (b) est tout aussi évidente.

La correspondance «cogèbres $\Leftrightarrow$ algèbres profinies» établie ci-dessus se prolonge en une correspondance «comodules $\Leftrightarrow$ modules». De façon précise, soient

Com^f_C la catégorie des C-comodules à gauche de rang fini,

Mod^f_A la catégorie des A-modules à gauche de rang fini, dont l'annulateur est ouvert (i.e. qui sont des A-modules topologiques si on les munit de la topologie discrète).

Si $E \in \mathrm{Com}^f_C$, l'application $E \to C \otimes E$ définit par dualité une application $A \otimes E' \to E'$, et l'on voit tout de suite que cette application fait de E' un A-module à gauche topologique discret.

PROPOSITION 2. *Le foncteur* $E \mapsto E'$ *défini ci-dessus est une équivalence de la catégorie* Com^f_C *sur la catégorie opposée à* Mod^f_A.

C'est immédiat.

Noter aussi que, si F est un A-module à gauche de rang fini, F' a une structure naturelle de A^o-module à gauche. En combinant cette remarque avec la prop. 2, on obtient:

COROLLAIRE. *La catégorie* Com^f_C *est isomorphe à la catégorie* $\mathrm{Mod}^f_{A^o}$.

Remarque. Soit $E \in \mathrm{Com}^f_C$; munissons E' (resp. E) de la structure correspondante de A-module à gauche (resp. à droite). Si $x \in E$, $x' \in E'$ et $a, b \in A$, on a alors les formules:

$$(1) \qquad < d_E(x),\ a \otimes x' > \; = \; < x, ax' > \; = \; < xa, x' >$$

et

$$(2) \qquad < d_E^{(2)}(x),\ a \otimes b \otimes x' > \; = \; < x, abx' > \; = \; < xab, x' > ,$$

avec

$$d_E^{(2)} = (d \otimes 1_E) \circ d_E = (1_C \otimes d_E) \circ d_E \, .$$

2.3. TRADUCTIONS

Tout résultat sur les modules donne, grâce à la prop. 2 et à son corollaire, un résultat correspondant sur les comodules. Voici quelques exemples:

a) Si $E \in \mathrm{Com}^f_C$, la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1) est la duale de la sous-algèbre de $\mathrm{End}(E)$ définie par la structure de module de E.

b) Le fait que C soit un C-comodule injectif (cf. n° 1.4) est la traduction du fait que A est un A-module projectif (puisque libre de rang 1 !).

c) Une cogèbre est dite *simple* si elle est $\neq 0$ et n'admet pas d'autre sous-cogèbre que 0 et elle-même; c'est alors le dual d'une algèbre simple de rang fini. Elle est dite *semi-simple* si elle est somme de sous-cogèbres simples, et on vérifie alors que l'on peut choisir cette somme de telle sorte qu'elle soit *directe*.

On a:

PROPOSITION 3. *Pour que* Com^f_C *soit une catégorie semi-simple, il faut et il suffit que* C *soit semi-simple.*

De plus, si c'est le cas, et si E_α est une famille de représentants des classes de comodules simples sur C, la cogèbre C est somme directe des cogèbres C_{E_α}, qui sont simples.

On a également:

COROLLAIRE. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *C est somme directe de cogèbres de la forme* $\mathbf{M}_n(K)$.