Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: §1. Cogèbres et comodules (généralités)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

On note Alg_K la catégorie des anneaux commutatifs K_1 munis d'un morphisme $K \to K_1$.

L'application identique d'un ensemble X est notée 1_X (ou simplement 1 si aucune confusion sur X n'est à craindre).

§ 1. Cogèbres et comodules (généralités)

1.1. Cogèbres

Dans tout ce paragraphe, C désigne une *cogèbre,* de coproduit d, possédant une co-unité (à droite et à gauche) e. Rappelons (cf. *Alg.* III) ce que cela signifie:

C est un module (sur K);

d est une application linéaire de C dans $C \otimes C$;

e est une forme linéaire sur C.

De plus, ces données vérifient les axiomes suivants:

(C_1) (Coassociativité) Les applications linéaires $(1_C \otimes d) \circ d$ et $(d \otimes 1_C) \circ d$ de C dans $C \otimes C \otimes C$ coïncident.

(C_2) (Co-unité) $(1_C \otimes e) \circ d = 1_C$ et $(e \otimes 1_C) \circ d = 1_C$.

Exemples

(1) Soit C une cogèbre de co-unité e. En composant le coproduit de C avec la symétrie canonique de $C \otimes C$, on obtient une seconde structure de cogèbre sur C, dite *opposée* de la première. On la note C^o; la co-unité de C^o est e.

(2) Toute somme directe de cogèbres a une structure naturelle de cogèbre. En particulier, 0 est une cogèbre.

(3) Supposons que C soit projectif de type fini (comme K-module), et soit A son dual. Comme le dual de $C \otimes C$ s'identifie à $A \otimes A$, toute structure de cogèbre sur C correspond à une structure d'*algèbre associative* sur A, et réciproquement. Pour que $e \in A$ soit co-unité de C, il faut et il suffit que ce soit un élément unité (à gauche et à droite) pour A.

(Lorsque K est un corps, on verra plus loin que toute cogèbre est limite inductive de cogèbres obtenues par ce procédé.)

(4) Soit V un module projectif de type fini. Soit

$$C = \mathrm{End}(V) = V \otimes V' .$$

La forme bilinéaire $\mathrm{Tr}(uv)$ met C en dualité avec lui-même; appliquant la méthode de l'exemple précédent, on voit que la structure d'algèbre de C définit par dualité une structure de *cogèbre* sur C, de co-unité la trace $\mathrm{Tr}: C \to K$. En particulier $M_n(K)$ a une structure de cogèbre canonique, pour laquelle on a

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{kj} \otimes E_{ik} .$$

(La cogèbre *opposée* est plus sympathique, cf. exercice 1.)

(5) Soient C_1 et C_2 deux cogèbres, de coproduits d_1 et d_2 et de co-unités e_1 et e_2. Soit σ l'isomorphisme canonique de $C_2 \otimes C_1$ sur $C_1 \otimes C_2$; le composé

$$(1_{C_1} \otimes \sigma \otimes 1_{C_2}) \circ (d_1 \otimes d_2)$$

munit $C_1 \otimes C_2$ d'une structure de cogèbre, dite *produit tensoriel* de celles de C_1 et C_2; elle admet pour co-unité $e_1 \otimes e_2$.

(6) L'algèbre affine d'un schéma en monoïdes affine sur K a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 3.1.

1.2. Comodules

DÉFINITION 1. *On appelle comodule (à gauche) sur C tout module E muni d'une application linéaire $d_E: E \to C \otimes E$ vérifiant les axiomes suivants:*

(1) *Les applications linéaires $(d \otimes 1_E) \circ d_E$ et $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$ de E dans $C \otimes C \otimes E$ coïncident.*

(2) $(e \otimes 1_E) \circ d_E = 1_E$.

L'application d_E s'appelle le *coproduit* de E; on se permet souvent de le (la) noter d.

Remarques

1) Il y a une notion analogue de comodule *à droite*; on laisse au lecteur le soin de l'expliciter (ou de remplacer la cogèbre C par son opposée C^o). [Le rédacteur s'est aperçu trop tard qu'il était plus commode d'échanger droite et gauche, i.e. d'appeler «comodules à droite» ceux de la définition 1.]

2) Toute application linéaire $d_E: E \to C \otimes E$ définit de manière évidente une application linéaire $d_E^1: E \otimes E' \to C$. Lorsque E est un K-module projectif de type fini, l'application $d_E \mapsto d_E^1$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(E, C \otimes E)$ sur $\mathrm{Hom}(E \otimes E', C)$. Or $E \otimes E' = \mathrm{End}(E)$ a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 1.1, Exemple 4). On peut vérifier (cf. exercice 1) que d_E *vérifie les axiomes* (1) *et* (2) *si et seulement si* d_E^1 *est*

un morphisme de la cogèbre opposée End$(E)^o$ *à* End(E) *dans la cogèbre* C, *compatible avec les co-unités.*

3) Supposons que E soit *libre* de base $(v_i)_{i \in I}$. Une application linéaire $d_E : E \to C \otimes E$ est alors définie par une famille c_{ij}, $i, j \in I$, d'éléments de C telle que $d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j$ (pour i fixé, c_{ij} doit être nul pour presque tout j). Les conditions (1) et (2) de la définition 1 se traduisent alors par les formules:

$$(1') \quad d(c_{ij}) = \sum_{k \in I} c_{ik} \otimes c_{kj} \qquad \text{pour} \quad i, j \in I$$

$$(2') \quad e(c_{ij}) = \delta_{ij} \qquad \text{pour} \quad i, j \in I\,.$$

(Lorsque I est *fini*, cet exemple peut être considéré comme un cas particulier du précédent.)

Exemples de comodules

1) Le module C, muni de d, est un comodule (à gauche et à droite).

2) La somme directe d'une famille de comodules a une structure naturelle de comodule.

3) Si E est un comodule, et V un K-module quelconque, le couple $(E \otimes V, d_E \otimes 1_V)$ est un comodule, noté simplement $E \otimes V$.

4) Les notations étant celles de l'exemple 5) du n° 1.1, soient E_1 un comodule sur C_1 et E_2 un comodule sur C_2. Soit τ l'isomorphisme canonique de $E_1 \otimes C_2$ sur $C_2 \otimes E_1$; l'application

$$(1_{C_1} \otimes \tau \otimes 1_{E_2}) \circ (d_{E_1} \otimes d_{E_2})$$

munit $E_1 \otimes E_2$ d'une structure de comodule sur $C_1 \otimes C_2$.

5) Si G est un schéma en monoïdes affine sur K, et C la bigèbre correspondante (cf. n° 3.1), la notion de comodule sur C coïncide avec celle de *représentation linéaire de G* (ou G-module), cf. n° 3.2, ainsi que SGAD, exposé I.

DÉFINITION 2. *Soient E_1 et E_2 deux comodules. On appelle C-morphisme (ou simplement morphisme) de E_1 dans E_2 toute application linéaire $f : E_1 \to E_2$ telle que*

$$(*) \qquad (1_C \otimes f) \circ d_{E_1} = d_{E_2} \circ f\,.$$

Les C-morphismes de E_1 dans E_2 forment un sous-K-module de $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$; on le note $\mathrm{Hom}^C(E_1, E_2)$.

On note Com_C la catégorie des C-comodules (à gauche); l'addition des C-morphismes munit Com_C d'une structure de *catégorie additive.*

1.3. Une formule d'adjonction

On conserve les notations précédentes. Soit V un K-module; d'après le n° 1.2, Exemples 1 et 3, on a une structure naturelle de comodule sur $C \otimes V$, le coproduit correspondant étant $d \otimes 1_V$.

Soit d'autre part E un comodule. Définissons une application linéaire

$$\theta : \mathrm{Hom}(E, V) \to \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$$

par

$$\theta(g) = (1_C \otimes g) \circ d_E , \quad \text{si} \quad g \in \mathrm{Hom}(E, V) .$$

Cela a un sens, car d_E est un morphisme de E dans $C \otimes E$, et $1_C \otimes g$ est un morphisme de $C \otimes E$ dans $C \otimes V$.

Proposition 1. *L'application* $\theta : \mathrm{Hom}(E, V) \to \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$ *est un isomorphisme.*

Soit $f : E \to C \otimes V$ un morphisme. En composant f avec $e \otimes 1_V$: $C \otimes V \to V$, on obtient un élément $\varepsilon(f)$ de $\mathrm{Hom}(E, V)$. On a ainsi défini une application linéaire

$$\varepsilon : \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V) \to \mathrm{Hom}(E, V)$$

et il suffit de prouver que θ et ε sont inverses l'un de l'autre. Tout d'abord, si $g \in \mathrm{Hom}(E, V)$, on a:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\theta(g)) &= (e \otimes 1_V) \circ \theta(g) = (e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes g) \circ d_E \\ &= (e \otimes g) \circ d_E = g \circ (e \otimes 1_E) \circ d_E \\ &= g \circ 1_E = g ,\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\varepsilon \circ \theta = 1$.

D'autre part, si $f \in \mathrm{Hom}^C(E, C \otimes V)$, on a:

$$\begin{aligned}\theta(\varepsilon(f)) &= (1_C \otimes \varepsilon(f)) \circ d_E = (1_C \otimes ((e \otimes 1_V) \circ f)) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes f) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (d \otimes 1_V) \circ f \\ &= (((1_C \otimes e) \circ d) \otimes 1_V) \circ f \\ &= (1_C \otimes 1_V) \circ f = f ,\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\theta \circ \varepsilon = 1$, cqfd.

[Ce qui précède est un bon exemple d'un principe général: tout calcul relatif aux cogèbres est trivial et incompréhensible.]

Exemples

1) Prenons $V = E$ et $g = 1_E$; l'élément correspondant de $\mathrm{Hom}^C(E, C \otimes E)$ est le coproduit $d_E : E \to C \otimes E$.

2) Prenons $V = K$. On obtient une bijection $\theta : E' \to \mathrm{Hom}^C(E, C)$. La bijection réciproque associe à tout morphisme $f : E \to C$ la forme linéaire $e \circ f$.

1.4. Conséquences d'une hypothèse de platitude

A partir de maintenant, on suppose que C est *plat* (comme K-module). Si V est un sous-module d'un module W, on identifie $C \otimes V$ au sous-module correspondant de $C \otimes W$, et $C \otimes (W/V)$ à $(C \otimes W)/(C \otimes V)$.

Définition 3. *Soit E un C-comodule, et soit V un sous-module de E. On dit que V est stable par C (ou que c'est un sous-comodule de E) si d_E applique V dans $C \otimes V$.*

Si tel est le cas, on vérifie tout de suite que l'application $d_V : V \to C \otimes V$ induite par d_E fait de V un comodule (d'où la terminologie); on définit de même le comodule quotient E/V.

Exemples

1) Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules du comodule E. Si les V_i sont stables par C, il en est de même de $\sum_{i \in I} V_i$ (resp. de $\bigcap_{i \in I} V_i$ lorsque I est fini). Cela résulte des formules:

$$C \otimes (\sum V_i) = \sum (C \otimes V_i)$$

et

$$C \otimes (\cap V_i) = \cap (C \otimes V_i) , \quad I \text{ fini} ,$$

cf. *Alg. Comm.*, chap. I, §2.

2) Si E est un comodule, le morphisme $d_E : E \to C \otimes E$ *identifie E à un sous-comodule de $C \otimes E$* (muni du coproduit $d \otimes 1_E$, cf. n° 1.3). On notera que ce sous-comodule est même *facteur direct* dans $C \otimes E$ comme K-module (mais pas en général comme comodule), en vertu de la formule (2) de la définition 1.

Proposition 2. *Soit $f : E_1 \to E_2$ un morphisme de comodules. Alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont stables par C; de plus, f définit par passage au quotient un isomorphisme du comodule* $E_1/\mathrm{Ker}(f)$ *sur le comodule* $\mathrm{Im}(f)$.

Puisque C est plat, $C \otimes \operatorname{Ker}(f)$ est le noyau de $1_C \otimes f$ et $C \otimes \operatorname{Im}(f)$ en est l'image. On en déduit aussitôt que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par C. Le fait que f définisse un isomorphisme de $E_1/\operatorname{Ker}(f)$ sur $\operatorname{Im}(f)$ est immédiat.

COROLLAIRE 1. *La catégorie* Com_C *est une catégorie abélienne et le foncteur «module sous-jacent» est exact.*

C'est clair.

Remarque. Il est non moins clair que le foncteur «module sous-jacent» commute aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques.

COROLLAIRE 2. *Si* V *est un K-module injectif, le comodule* $C \otimes V$ *est injectif dans* Com_C.

En effet, la proposition 1 montre que le foncteur

$$E \mapsto \operatorname{Hom}^C(E, C \otimes V)$$

est exact.

PROPOSITION 3. *Soit* V *un sous-module d'un comodule* E, *et soit* V^o *l'ensemble des éléments* $x \in E$ *tels que* $d_E(x)$ *appartienne à* $C \otimes V$. *Alors* V^o *est un sous-comodule de* E; *c'est le plus grand sous-comodule de* E *contenu dans* V.

Il faut d'abord prouver que V^o est stable par C, i.e. que d_E applique V^o dans $C \otimes V^o$. Or V^o est défini comme le noyau de l'homomorphisme $E \to C \otimes E \to C \otimes (E/V)$, la première flèche étant d_E. Puisque C est plat, il s'ensuit que $C \otimes V^o$ est le noyau de l'homomorphisme

$$C \otimes E \to C \otimes C \otimes E \to C \otimes C \otimes (E/V) ,$$

la première flèche étant $1_C \otimes d_E$. Pour prouver que $d_E(V^o)$ est contenu dans $C \otimes V^o$, il suffit donc de vérifier que le composé

$$V^o \to C \otimes E \to C \otimes C \otimes E \to C \otimes C \otimes (E/V)$$

est nul. Mais, d'après l'axiome (1) de la déf. 1, le composé $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$ est égal à $(d \otimes 1_E) \circ d_E$. Or d_E applique V^o dans $C \otimes V$ par construction; l'image de V^o dans $C \otimes C \otimes E$ est donc contenue dans $(d \otimes 1_E)(C \otimes V)$, donc dans $C \otimes C \otimes V$, et son image dans $C \otimes C \otimes (E/V)$ est bien nulle.

D'autre part, l'axiome (2) de la déf. 1 montre que V^o est contenu dans $(e \otimes 1_E)(C \otimes V)$, donc dans V. Enfin, il est clair que tout sous-comodule de E contenu dans V est contenu dans V^o, cqfd.

Nous dirons qu'un comodule est de *type fini* (resp. libre, projectif, ...) si c'est un K-module de type fini (resp. un K-module libre, un K-module projectif, ...).

COROLLAIRE. *Supposons K noethérien. Tout comodule E est alors réunion filtrante croissante de ses sous-comodules de type fini.*

Il suffit évidemment de prouver ceci: si W est un sous-module de type fini de E, il existe un sous-comodule de E, qui est de type fini et contient W. Or $d_E(W)$ est un sous-module de type fini de $C \otimes E$. On peut donc trouver un sous-module V de type fini de E tel que $C \otimes V$ contienne $d_E(W)$. Soit V^o l'ensemble des $x \in E$ tels que $d_E(x) \in C \otimes V$. D'après la proposition, V^o est un sous-comodule de E contenu dans V, donc de type fini (puique K est noethérien). Il est clair que V^o contient W, cqfd.

§2. COGÈBRES SUR UN CORPS

A partir de maintenant, l'anneau de base K est un *corps*.

2.1. SOUS-COGÈBRES

Soit C une cogèbre sur K, de coproduit d et de co-unité e.

DÉFINITION 1. *Un sous-espace vectoriel X de C est appelé une sous-cogèbre de C si $d(X)$ est contenu dans $X \otimes X$.*

S'il en est ainsi, l'application linéaire $d_X \colon X \to X \otimes X$ induite par d munit X d'une structure de cogèbre, ayant pour co-unité la restriction de e à X.

Exemples

1) Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-cogèbres de C, la somme des X_i et l'intersection des X_i sont des sous-cogèbres de C. Cela se vérifie au moyen des formules:

$$\sum (X_i \otimes X_i) \subset (\sum X_i) \otimes (\sum X_i)$$
$$\bigcap (X_i \otimes X_i) = (\bigcap X_i) \otimes (\bigcap X_i) .$$