

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3  
**Autor:** Lannes, Jean  
**Kapitel:** 3. Relations d'intersection  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60429>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 3. RELATIONS D'INTERSECTION

On utilise les notations du paragraphe précédent. On fixe une «origine»  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ ; on rappelle que le choix de  $a$  détermine une relation d'ordre total sur  $S^1 - \{a\}$  et sur  $X$ . On décrit dans ce paragraphe certaines relations entre les entiers  $e(x, y)$  et  $\varepsilon_x(s_a)$  qui joueront un rôle crucial dans le prochain paragraphe.

3.1. Soit  $x$  un point de  $X$ . Soit  $D$  un petit disque fermé de  $\mathbf{R}^2$  de centre  $x$ ; on note  $I_1$  et  $I_2$  les deux composantes connexes de  $S^1 - \alpha^{-1}(D - \partial D)$ . Le point  $a$  se trouve à l'intérieur de l'une de ces composantes, disons  $I_1$ . On considère maintenant  $S^1$  plongé de façon standard dans  $\mathbf{R}^2$  et on note  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , la réunion de  $I_i$  et du segment  $J_i$  joignant les deux extrémités de  $I_i$  (voir figure 7). On note encore  $\alpha: C_i \rightarrow \mathbf{R}^2$  le prolongement affine de  $\alpha|_{I_i}$ ; on observe que  $\alpha(J_1)$  et  $\alpha(J_2)$  ne se rencontrent pas. La 0-chaîne

$$\sum_{y \in X, y < x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) y - \sum_{y \in X, y > x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) y$$

représente dans  $H_0(\mathbf{R}^2; \mathbf{Z})$  l'intersection des deux cercles «immergés»  $\alpha(C_1)$  et  $\alpha(C_2)$ ; on a donc la relation suivante:

$$(3.1) \quad \sum_{y \in X, y < x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) = \sum_{y \in X, y > x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) .$$

3.2. Soient maintenant  $x$  et  $y$  deux points de  $X$  avec  $e(x, y) = 0$  et  $x < y$ . On pose  $\alpha^{-1}(x) = \{\xi, \xi^*\}$  et  $\alpha^{-1}(y) = \{\eta, \eta^*\}$  avec  $\xi < \xi^*$  et  $\eta < \eta^*$ . On a dans  $S^1 - \{a\}$  deux configurations possibles:

- 1)  $\xi < \eta < \eta^* < \xi^*$ ;
- 2)  $\xi < \xi^* < \eta < \eta^*$ .

*Premier cas* (figure 8).

En considérant l'intersection de  $\alpha(C_1)$  et  $\alpha(C_2)$  on obtient:

$$\sum_{z \in X, z < x} e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) = \sum_{z \in X, z > y} e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) .$$

On observe également que pour  $x < z < y$  on a  $e(x, z) e(y, z) = 0$ .

*Deuxième cas* (figure 9).

En considérant l'intersection de  $\alpha(C_1)$  et  $\alpha(C_2)$  on obtient cette fois:

$$\sum_{z \in X, x < z < y} e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) = 0$$

et l'on observe que pour  $z < x$  ou  $z > y$  on a  $e(x, z) e(y, z) = 0$ .

Supposons encore  $x < y$  mais ne supposons plus  $e(x, y) = 0$ , il résulte de ce qui précède que l'on a dans tous les cas les relations suivantes:

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} & \sum_{z \in X, z < x} (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) \\ &= \sum_{z \in X, z > y} (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) ; \end{aligned}$$

$$(3.2.2) \quad \sum_{z \in X, x < z < y} (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) = 0 .$$

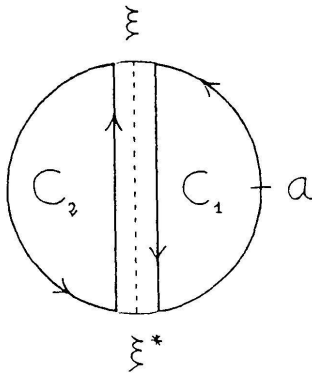


FIGURE 7

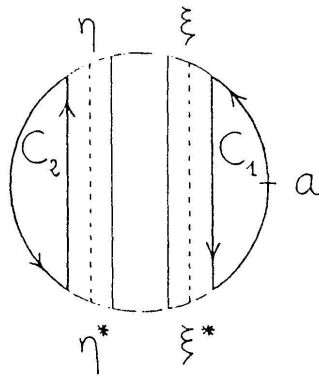


FIGURE 8

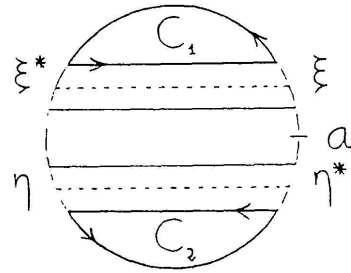


FIGURE 9

4. EXPRESSION DES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3 EN TERMES DE POINTS DE CROISEMENT

Soient  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant des nœuds et  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On note encore abusivement  $f: S = S(\alpha) \rightarrow A$  l'application induite par l'invariant  $f$ . On continue à utiliser les notations du paragraphe 2.

4.1. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 1

PROPOSITION 4.1. *Tout invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 est nul. (Rappelons que nous supposons qu'un invariant est nul sur le nœud trivial.)*

Démonstration. Soient  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 et  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On fixe une origine  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ . L'application  $f: S = S(\alpha) \rightarrow A$ , qui est de degré inférieur ou égal à 1, est de la forme:

$$f(s) = c_\emptyset + \sum_{x \in X} \delta_{s_a, x}(s) c_x$$

(notations du paragraphe 2). Le coefficient  $c_\emptyset = f(s_a)$  est nul; on montre qu'il en est de même pour les coefficients  $c_x$  de la façon suivante. Soient  $s_1$