Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3

Autor: Lannes, Jean

Kapitel: 3. Relations d'intersection

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60429

3. Relations d'intersection

On utilise les notations du paragraphe précédent. On fixe une «origine» a dans $S^1 - \tilde{X}$; on rappelle que le choix de a détermine une relation d'ordre total sur $S^1 - \{a\}$ et sur X. On décrit dans ce paragraphe certaines relations entre les entiers $e(x, y)$ et $\varepsilon_x(s_a)$ qui joueront un rôle crucial dans le prochain paragraphe.

3.1. Soit x un point de X. Soit D un petit disque fermé de $\mathbf{R}^2$ de centre x; on note I_1 et I_2 les deux composantes connexes de $S^1 - \alpha^{-1}(D - \partial D)$. Le point a se trouve à l'intérieur de l'une de ces composantes, disons I_1. On considère maintenant S^1 plongé de façon standard dans $\mathbf{R}^2$ et on note C_i, $i = 1, 2$, la réunion de I_i et du segment J_i joignant les deux extrémités de I_i (voir figure 7). On note encore $\alpha : C_i \to \mathbf{R}^2$ le prolongement affine de $\alpha_{|I_i}$; on observe que $\alpha(J_1)$ et $\alpha(J_2)$ ne se rencontrent pas. La 0-chaîne

$$\sum_{y \in X, y < x} e(x, y)\, \varepsilon_y(s_a)\, y - \sum_{y \in X, y > x} e(x, y)\, \varepsilon_y(s_a)\, y$$

représente dans $H_0(\mathbf{R}^2; \mathbf{Z})$ l'intersection des deux cercles «immergés» $\alpha(C_1)$ et $\alpha(C_2)$; on a donc la relation suivante:

$$\sum_{y \in X, y < x} e(x, y)\, \varepsilon_y(s_a) = \sum_{y \in X, y > x} e(x, y)\, \varepsilon_y(s_a)\,. \tag{3.1}$$

3.2. Soient maintenant x et y deux points de X avec $e(x, y) = 0$ et $x < y$. On pose $\alpha^{-1}(x) = \{\xi, \xi^*\}$ et $\alpha^{-1}(y) = \{\eta, \eta^*\}$ avec $\xi < \xi^*$ et $\eta < \eta^*$. On a dans $S^1 - \{a\}$ deux configurations possibles:

1) $\xi < \eta < \eta^* < \xi^*$;

2) $\xi < \xi^* < \eta < \eta^*$.

Premier cas (figure 8).

En considérant l'intersection de $\alpha(C_1)$ et $\alpha(C_2)$ on obtient:

$$\sum_{z \in X, z < x} e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a) = \sum_{z \in X, z > y} e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a)\,.$$

On observe également que pour $x < z < y$ on a $e(x, z)\, e(y, z) = 0$.

Deuxième cas (figure 9).

En considérant l'intersection de $\alpha(C_1)$ et $\alpha(C_2)$ on obtient cette fois:

$$\sum_{z \in X, x < z < y} e(x, z)\, e(y, z)\, \varepsilon_z(s_a) = 0$$

et l'on observe que pour $z < x$ ou $z > y$ on a $e(x, z)\, e(y, z) = 0$.

Supposons encore $x < y$ mais ne supposons plus $e(x, y) = 0$, il résulte de ce qui précède que l'on a dans tous les cas les relations suivantes:

$$\begin{aligned}(3.2.1)\qquad & \sum\nolimits_{z \in X,\, z < x} (1 - e(x,y))\, e(x,z)\, e(y,z)\, \varepsilon_z(s_a) \\ & = \sum\nolimits_{z \in X,\, z > y} (1 - e(x,y))\, e(x,z)\, e(y,z)\, \varepsilon_z(s_a)\ ;\end{aligned}$$

$$(3.2.2)\qquad \sum\nolimits_{z \in X,\, x < z < y} (1 - e(x,y))\, e(x,z)\, e(y,z)\, \varepsilon_z(s_a) = 0\ .$$

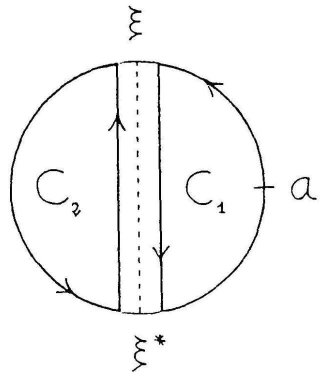

FIGURE 7

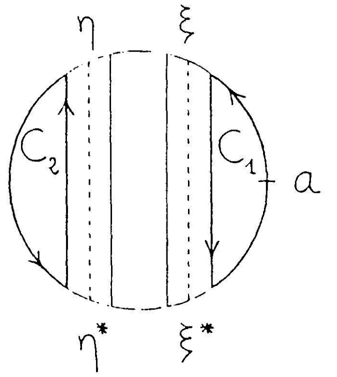

FIGURE 8

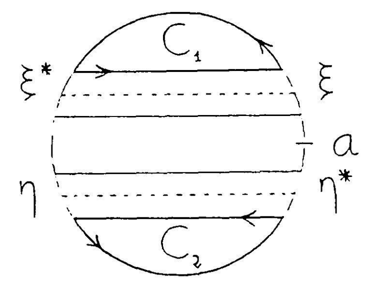

FIGURE 9

4. Expression des invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3 en termes de points de croisement

Soient $f\colon \mathcal{N} \to A$ un invariant des nœuds et α une immersion générique de S^1 dans $\mathbf{R}^2$. On note encore abusivement $f\colon S = S(\alpha) \to A$ l'application induite par l'invariant f. On continue à utiliser les notations du paragraphe 2.

4.1. Invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1

PROPOSITION 4.1. *Tout invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à* 1 *est nul. (Rappelons que nous supposons qu'un invariant est nul sur le nœud trivial.)*

Démonstration. Soient $f\colon \mathcal{N} \to A$ un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 et α une immersion générique de S^1 dans $\mathbf{R}^2$. On fixe une origine a dans $S^1 - \tilde{X}$. L'application $f\colon S = S(\alpha) \to A$, qui est de degré inférieur ou égal à 1, est de la forme:

$$f(s) = c_\varnothing + \sum\nolimits_{x \in X} \delta_{s_a,\, x}(s)\, c_x$$

(notations du paragraphe 2). Le coefficient $c_\varnothing = f(s_a)$ est nul; on montre qu'il en est de même pour les coefficients c_x de la façon suivante. Soient s_1