

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	39 (1993)
<b>Heft:</b>	3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 SUR LES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3
<b>Autor:</b>	Lannes, Jean
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-60429">https://doi.org/10.5169/seals-60429</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## SUR LES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3

par Jean LANNES

### 0. INTRODUCTION

L'objet de cette note est de montrer que les invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3 d'un nœud de  $\mathbf{R}^3$ , donné par l'une de ses projections génériques, s'expriment comme des sommes de termes indexés par les parties à 2 et 3 éléments de l'ensemble des points de croisement.

Il s'agit d'une suite, suscitée par la lecture de l'article [Ba] de Bar-Natan, de la note [La] où l'on montrait que l'invariant de Kervaire d'un nœud s'exprime comme une somme dans  $\mathbf{Z}/2$  de termes indexés par les paires de points de croisement (l'invariant de Kervaire est l'unique invariant de Vassiliev à valeurs dans  $\mathbf{Z}/2$  de degré inférieur ou égal à 2, non nul, nul sur le nœud trivial).

Le présent travail est très élémentaire. Le paragraphe principal est le 4-ième dont le contenu est essentiellement le suivant:

- 1) On observe que la partie formelle de la théorie des invariants de Vassiliev (paragraphe 1) conduit aisément à leur expression en termes de points de croisement si le degré est supposé inférieur ou égal à 3; les calculs sont menés avec le formalisme du paragraphe 2.
- 2) On oublie le 1) (du moins on fait semblant!). On considère *a priori* ces expressions et l'on vérifie qu'elles sont invariantes par les mouvements de Reidemeister; les seuls ingrédients de cette vérification proviennent du paragraphe 3.

1. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ FINI  
(D'APRÈS VASSILIEV, BIRMAN ET LIN, BAR-NATAN)

Dans ce paragraphe nous résumons très brièvement cette théorie et nous en extrayons l'énoncé élémentaire 1.5 qui sera utilisé au paragraphe 4.

Nous appelons invariant des nœuds une application  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$ , définie sur l'ensemble  $\mathcal{N}$  des classes d'isotopie de plongements de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^3$  et à valeurs dans un groupe abélien  $A$ , telle que l'image du nœud trivial soit nulle.

Nous appelons nœud singulier une immersion  $\psi: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$  vérifiant les propriétés suivantes (voir figures 3, 4, 5 et 6):

- $\psi$  admet comme seules «singularités» des points doubles en nombre fini;
- en un point double les deux tangentes à  $\psi(S^1)$  sont distinctes.

On «désingularise»  $\psi$  en écartant en chaque point double les deux brins de  $\psi(S^1)$ ; à isotopie près on obtient ainsi  $2^m$  plongements  $\varphi: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $m$  désignant le nombre de points doubles de  $\psi$ . Soit  $x$  un de ces points doubles, on définit  $\varepsilon_x(\varphi) = \pm 1$  de la façon suivante. On pose  $\psi^{-1}(x) = \{\xi, \xi^*\}$  et on prend pour signe de  $\varepsilon_x(\varphi)$  celui du déterminant  $\det(\psi'(\xi), \psi'(\xi^*), \varphi(\xi) - \varphi(\xi^*))$  (on identifie ici  $S^1$  avec  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  et  $\psi$  avec une application  $\mathbf{Z}$ -périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^3$ ,  $\psi'$  désigne alors la dérivée de  $\psi$ ).

On étend l'invariant  $f$  aux nœuds singuliers en posant:

$$(1.1) \quad f(\psi) = \sum_{\varphi} (\prod_x \varepsilon_x(\varphi)) f(\varphi) .$$

Cette extension satisfait la formule de récurrence symbolique:

$$f(\overbrace{\nearrow \nwarrow}^{\times}) = f(\overbrace{\nearrow \nearrow}^{\times}) - f(\overbrace{\nearrow \searrow}^{\times}) .$$

#### EXEMPLES

On considère les nœuds singuliers des figures 3, 4, 5 et 6. On note  $T$  le nœud de trèfle,  $H$  le nœud de huit (figures 1 et 2), et  $K^*$  l'image dans un miroir d'un nœud  $K$  (le nœud obtenu à partir de  $K$  par composition au but avec un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^3$  renversant l'orientation). On obtient:

- $f(K_1) = f(T)$ ;
- $f(K_2) = f(T) - f(T^*)$ ;
- $f(K_3) = f(T) + f(H)$ ;
- $f(K_4) = f(T) + f(T^*) + f(H) + f(H^*)$  ou encore puisque  $H$  et  $H^*$  coïncident  $f(K_4) = f(T) + f(T^*) + 2f(H)$ .

On observe que l'on a:

$$(1.2) \quad f(K_4) = 2f(K_3) - f(K_2) .$$

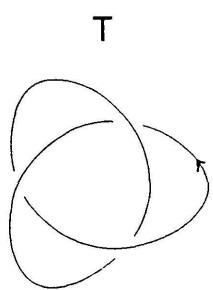


FIGURE 1

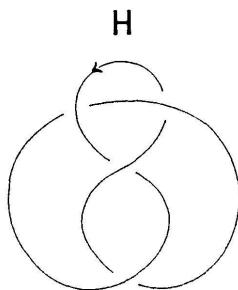


FIGURE 2

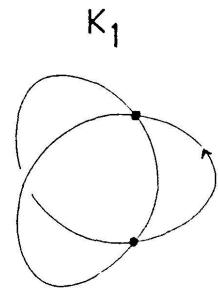


FIGURE 3

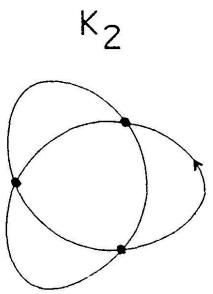


FIGURE 4

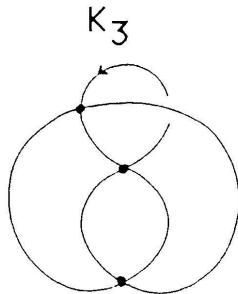


FIGURE 5

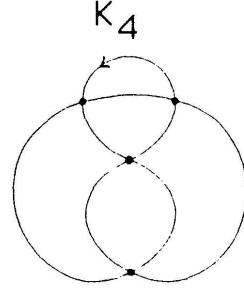


FIGURE 6

DÉFINITION 1.3. Soit  $m$  un entier, on dit qu'un invariant  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  est (un invariant de Vassiliev) de degré inférieur ou égal à  $m$  si  $f(\psi)$  est nul pour tout nœud singulier  $\psi$  dont le nombre de points doubles est strictement supérieur à  $m$ . (On dit qu'il est de degré  $m$  s'il est de degré inférieur ou égal à  $m$  sans être de degré inférieur ou égal à  $m - 1$ .)

#### FONCTIONS DE POIDS

Soit  $\psi$  un nœud singulier à  $m$  points doubles. L'ensemble des points doubles à la source est un sous-ensemble de  $2m$  points de  $S^1$ , muni d'une involution sans points fixes. Les classes d'isotopie de tels sous-ensembles sont appelées des diagrammes à  $m$  cordes; l'ensemble (fini) des diagrammes à  $m$  cordes est noté  $\mathcal{D}_m$ . Soit  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à  $m$ . On se convainc sans peine que  $f(\psi)$  ne dépend que du diagramme à  $m$  cordes défini par  $\psi$ . On associe de la sorte à l'invariant  $f$  une application  $W_f: \mathcal{D}_m \rightarrow A$ . On vérifie que  $W_f$  satisfait deux systèmes de relations linéaires. Le premier correspond à l'énoncé 1.4 ci-dessous; pour le second, constitué des relations dites des 4 termes, voir par exemple [Ba] (dans le cas  $m = 3$  ces relations sont conséquence de (1.2) et (1.4)). Les applications de  $\mathcal{D}_m$  dans  $A$  vérifiant ces deux systèmes sont appelées des fonctions de poids de degré  $m$ . La partie difficile de la théorie est de montrer que l'application  $f \mapsto W_f$  est surjective (au moins pour  $A = \mathbf{R}$ , théorème de Kontsevitch).

Dans cette note nous traitons «élémentairement» le cas  $m \leq 3$ .

Nous dirons que deux points doubles (au but)  $x$  et  $y$  de  $\psi$  sont enlacés si les 0-sphères  $\psi^{-1}(x)$  et  $\psi^{-1}(y)$  sont enlacés dans  $S^1$ .

**PROPOSITION 1.4.** *Soient  $\psi$  un nœud singulier à  $m$  points doubles et  $f$  un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à  $m$ . S'il existe un point double de  $\psi$  qui n'est enlacé avec aucun autre alors  $f(\psi)$  est nul.*

Pour une démonstration voir par exemple [Ba].

Soit maintenant  $\psi$  un nœud singulier à 2 ou 3 points doubles. Quand  $\psi$  a 2 points doubles nous posons  $W_2(\psi) = 1$  si ces deux points doubles sont enlacés et  $W_2(\psi) = 0$  sinon. Quand  $\psi$  a 3 points doubles nous posons  $W_3(\psi) = \sup(N - 1, 0)$ ,  $N$  désignant le nombre de paires de points doubles enlacés.

La proposition 1.4 et les calculs d'invariants de nœuds singuliers que nous avons donné ci-dessus comme exemples conduisent à l'énoncé suivant:

**PROPOSITION 1.5.** (a) *La valeur d'un invariant de Vassiliev  $f$  de degré inférieur ou égal à 2 sur un nœud singulier  $\psi$  à 2 points doubles est donnée par*

$$f(\psi) = W_2(\psi) f(T).$$

(b) *La valeur d'un invariant de Vassiliev  $f$  de degré inférieur ou égal à 3 sur un nœud singulier  $\psi$  à 3 points doubles est donnée par*

$$f(\psi) = W_3(\psi) (f(T) + f(H)).$$

## 2. FORMALISME RELATIF AUX NŒUDS DE $\mathbf{R}^3$ AU-DESSUS D'UNE IMMERSION GÉNÉRIQUE DE $S^1$ DANS $\mathbf{R}^2$

On reprend le formalisme de [La].

Soit  $\alpha: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$  une immersion générique. On note respectivement  $\tilde{X}$  et  $X$  l'ensemble des points doubles de  $\alpha$  à la source et au but. La restriction de  $\alpha: \tilde{X} \rightarrow X$  est un revêtement (trivial) à deux feuillets dont l'ensemble des sections est noté  $S$ . Quand nous serons amenés à faire varier  $\alpha$ , nous préciserons ces notations en  $\tilde{X}(\alpha)$ ,  $X(\alpha)$ ,  $S(\alpha)$ . L'ensemble  $S$  est un espace affine sous l'ensemble  $\mathcal{P}(X)$  des parties de  $X$  vu comme un  $\mathbf{Z}/2$ -espace vectoriel: la différence entre deux sections  $s$  et  $s'$  est la partie  $\{x; s(x) \neq s'(x)\}$ . Nous nous autorisons par la suite à identifier  $\mathcal{P}(X)$  avec  $\{0, 1\}^X$  (alors que l'on préférerait considérer  $(\mathbf{Z}/2)^X$  dans [La]) ou avec le  $\mathbf{Z}/2$ -espace vectoriel de

base  $X$ . On note enfin  $\xi \mapsto \xi^*$  l'involution de  $\tilde{X}$  associée au revêtement  $\tilde{X} \rightarrow X$ .

Un diagramme de nœud n'est rien d'autre que la donnée  $(\alpha; s)$  d'une immersion générique  $\alpha$  de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$  et d'un élément  $s$  de  $S(\alpha)$ . Précisons. À une section  $s$  on fait correspondre un «nœud au-dessus de  $\alpha$ » de la façon suivante. Soit  $\theta_s: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction vérifiant  $\theta_s(s(x)) > \theta_s((s(x))^*)$  pour tout  $x$  dans  $X$ ; l'application  $\varphi_s = \alpha \times \theta_s: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$  est un plongement dont la classe d'isotopie est indépendante du choix de  $\theta_s$ .

## SECTIONS DESCENDANTES

Soit  $a$  un point de  $S^1 - \tilde{X}$ , on définit une section, notée  $s_a$ , du revêtement  $\tilde{X} \rightarrow X$  de la façon suivante. On munit  $S^1 - \{a\}$  de la relation d'ordre induite par un difféomorphisme orienté de  $S^1 - \{a\}$  sur  $\mathbf{R}$  et on pose  $s_a(x) = \inf \alpha^{-1}(x)$ . Il est clair que  $s_a$  ne dépend que de la composante connexe de  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ . Nous appelons ce type de sections des sections descendantes. Le tracé des nœuds correspondants explique cette terminologie; ces nœuds sont triviaux.

## RELATION D'ORDRE SUR $X$ INDUIITE PAR LE CHOIX D'UN POINT $a$ DE $S^1 - \tilde{X}$

Un point  $a$  de  $S^1 - \tilde{X}$  étant fixé, on munit  $X$  de la relation d'ordre image réciproque de celle de  $S^1 - \{a\}$  par la section descendante  $s_a$ . On a donc  $x < y$ ,  $x$  et  $y$  désignant deux points de  $X$ , si  $\inf \alpha^{-1}(x) < \inf \alpha^{-1}(y)$ .

## COORDONNÉES SUR $S$

Soient  $o$  un point de  $S$  et  $x$  un point de  $X$ . Nous notons  $\delta_{o,x}: S \rightarrow \{0, 1\}$  l'application  $s \mapsto (s - o)(x)$ .

Nous notons  $\varepsilon_x: S \rightarrow \{\pm 1\}$  l'application  $s \mapsto \det(\alpha'(s(x)), \alpha'((s(x))^*))$  (on identifie  $\alpha$  avec une application  $\mathbf{Z}$ -périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^2$ ). Cette notation est en accord avec le premier paragraphe: si l'on considère  $\varphi_s$  comme une désingularisation dans  $\mathbf{R}^3$  de  $\alpha$  on a bien  $\varepsilon_x(s) = \varepsilon_x(\varphi_s)$ .

Les applications  $(\delta_{o,x})_{x \in X}$  et  $(\varepsilon_x)_{x \in X}$  doivent être vues comme des coordonnées sur  $S$ . Elles sont liées par la relation

$$(2.1) \quad \varepsilon_x(s) = (-1)^{\delta_{o,x}(s)} \varepsilon_x(o) = (1 - 2\delta_{o,x}(s))\varepsilon_x(o).$$

## «CALCULUS» DANS $A^S$

Un invariant des nœuds à valeurs dans  $A$  induit une application de  $S$  dans  $A$ . Aussi aurons-nous besoin d'un peu de «calculus» dans  $A^S$ .

Soit  $f$  une application de  $S$  dans un groupe abélien  $A$ . Soit  $x$  un point de  $X$ , on pose  $(\Delta_x f)(s) = f(s+x) - f(s)$ . Soit  $P$  une partie de  $X$ , on note  $\Delta_P$  l'endomorphisme de  $A^S$  composé des endomorphismes  $\Delta_x$ ,  $x$  parcourant  $P$ . La proposition ci-dessous (dont la vérification est laissée au lecteur) est un genre de formule de Taylor.

Soit  $u$  une application  $X \rightarrow \{0, 1\}$ ; on note encore  $u$  l'application  $\mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$  définie par  $u(P) = \prod_{x \in P} u(x)$ .

**PROPOSITION 2.2.** *Soit  $f$  une application de  $S$  dans un groupe abélien  $A$ . Pour tout  $s$  dans  $S$  et tout  $u$  dans  $\{0, 1\}^X$  on a:*

$$f(s+u) = \sum_{P \in \mathcal{P}(X)} u(P) (\Delta_P f)(s).$$

Comme à l'ordinaire cet énoncé admet la variante ci-après. On pose  $\delta_{o, P}(s) = \prod_{x \in P} \delta_{o, x}(s)$ .

**PROPOSITION 2.3.** *Soit  $f$  une application de  $S$  dans un groupe abélien  $A$ . Pour tout  $s$  et tout  $o$  dans  $S$  on a:*

$$f(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}(X)} \delta_{o, P}(s) (\Delta_P f)(o).$$

Réiproquement soient  $(c_P)_{P \in \mathcal{P}(X)}$  une famille d'éléments de  $A$  indexée par  $\mathcal{P}(X)$  et  $f$  l'application de  $S$  dans  $A$  définie par  $f(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}(X)} \delta_{o, P}(s) c_P$ . On vérifie alors que l'on a  $(\Delta_P f)(o) = c_P$  ce qui montre que toute application de  $S$  dans  $A$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\sum_{P \in \mathcal{P}(X)} \delta_{o, P} c_P$ . On vérifie que l'on a plus généralement

$$(\Delta_P f)(s) = \left( \prod_{x \in P} (-1)^{\delta_{o, x}(s)} \right) \sum_{Q \in \mathcal{P}(X), Q \supset P} \delta_{o, Q-P}(s) c_Q.$$

**PROPOSITION-DÉFINITION 2.4.** *Soient  $f$  une application de  $S$  dans un groupe abélien  $A$ ,  $m$  un entier,  $o$  un point de  $S$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $\Delta_P f = 0$  pour toute partie  $P$  à  $m+1$  éléments de  $X$ ;
- (ii)  $(\Delta_P f)(o) = 0$  pour toute partie  $P$  de  $X$  dont le cardinal est strictement supérieur à  $m$ .

*Si ces conditions sont vérifiées on dit que  $f$  est de degré inférieur ou égal à  $m$ .*

On pose à nouveau  $\varepsilon_P(s) = \prod_{x \in P} \varepsilon_x(s)$ . Soit  $f$  une application de  $S$  dans  $A$  de degré inférieur ou égal à  $m$ . Compte tenu de (2.1), on peut écrire  $2^m f$  sous la forme

$$2^m f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\leq m}(X)} \varepsilon_P c_P,$$

$(c_P)_{P \in \mathcal{P}_{\leq m}(X)}$  désignant une famille d'éléments de  $A$  indexée par l'ensemble  $\mathcal{P}_{\leq m}(X)$  des parties de  $X$  dont le cardinal est inférieur ou égal à  $m$ . Si la multiplication par 2 est injective dans  $A$  cette écriture est unique. Si de plus  $A$  est un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ -module alors toute application  $f$  de  $S$  dans  $A$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = \sum_{P \in \mathcal{P}(X)} \varepsilon_P c_P.$$

Dans ces coordonnées (les coordonnées  $\varepsilon_x$ ) on a

$$f(s^*) = \sum_{P \in \mathcal{P}(X)} \varepsilon_P(s)(-1)^{|P|} c_P,$$

$s^*$  désignant l'élément de  $S$  défini par  $s^*(x) = (s(x))^*$  (l'involution dans  $S$ ,  $s \mapsto s^*$ , correspond dans  $\mathcal{N}$  à l'image dans un miroir) et  $|P|$  désignant le cardinal de  $P$ .

#### DIFFÉRENCES SUCCESSIVES ET NOEUDS SINGULIERS

A cause de la formule (1.1) il peut être avantageux de substituer dans le formalisme précédent à l'endomorphisme  $\Delta_x$  de  $A^S$  l'endomorphisme  $D_x$  défini par  $(D_x f)(s) = -\varepsilon_x(s)(\Delta_x f)(s)$ . On observera que  $D_x$  et  $D_y$  commutent pour tous  $x$  et  $y$  dans  $X$  et que  $D_x$  est de carré nul. On note encore  $D_P$  le composé des  $D_x$ ,  $x$  parcourant une partie  $P$  de  $X$ ;  $D_P$  et  $\Delta_P$  sont reliés par la formule  $(D_P f)(s) = (-1)^{|P|} \varepsilon_P(s)(\Delta_P f)(s)$ .

Soit  $\psi_{s,P}$  le nœud singulier obtenu en remplaçant dans la définition de  $\varphi_s$  la fonction  $\theta_s$  par une fonction  $\theta_{s,P}$  vérifiant  $\theta_{s,P}(s(x)) = \theta_{s,P}((s(x))^*)$  pour tout  $x$  dans  $P$  et  $\theta_{s,P}(s(x)) > \theta_{s,P}((s(x))^*)$  pour tout  $x$  dans  $X - P$ ; la formule (1.1) donne:

**PROPOSITION 2.5.** *Soit  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant des nœuds. En notant encore  $f: S \rightarrow A$  l'application  $s \mapsto f(\varphi_s)$ , on a:*

$$f(\psi_{s,P}) = (D_P f)(s) = (-1)^{|P|} \varepsilon_P(s)(\Delta_P f)(s).$$

Cette proposition montre que la définition 2.4 est bien en accord avec la définition 1.3: une application de  $S$  dans  $A$  induite par un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à  $m$  est elle aussi de degré inférieur ou égal à  $m$ .

#### ENLACEMENT DES POINTS DOUBLES DE $\alpha$

Soit  $P = \{x, y\}$  une partie à deux éléments de  $X$  on pose  $e(P) = 1$  ou 0 suivant que  $x$  et  $y$  sont enlacés (rappelons que ceci signifie que les 0-sphères  $\alpha^{-1}(x)$  et  $\alpha^{-1}(y)$  sont enlacés dans  $S^1$ ) ou non;  $e(\{x, y\})$  sera également noté  $e(x, y)$ . Dans le langage de [Ba],  $\alpha^{-1}(P)$  est un diagramme à 2 cordes et on a avec le symbolisme de cet article:

$$e(\text{Diagramme avec croix}) = 1 \quad , \quad e(\text{Diagramme avec deux cercles}) = 0$$

### 3. RELATIONS D'INTERSECTION

On utilise les notations du paragraphe précédent. On fixe une «origine»  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ ; on rappelle que le choix de  $a$  détermine une relation d'ordre total sur  $S^1 - \{a\}$  et sur  $X$ . On décrit dans ce paragraphe certaines relations entre les entiers  $e(x, y)$  et  $\varepsilon_x(s_a)$  qui joueront un rôle crucial dans le prochain paragraphe.

3.1. Soit  $x$  un point de  $X$ . Soit  $D$  un petit disque fermé de  $\mathbf{R}^2$  de centre  $x$ ; on note  $I_1$  et  $I_2$  les deux composantes connexes de  $S^1 - a^{-1}(D - \partial D)$ . Le point  $a$  se trouve à l'intérieur de l'une de ces composantes, disons  $I_1$ . On considère maintenant  $S^1$  plongé de façon standard dans  $\mathbf{R}^2$  et on note  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , la réunion de  $I_i$  et du segment  $J_i$  joignant les deux extrémités de  $I_i$  (voir figure 7). On note encore  $\alpha: C_i \rightarrow \mathbf{R}^2$  le prolongement affine de  $\alpha|_{I_i}$ ; on observe que  $\alpha(J_1)$  et  $\alpha(J_2)$  ne se rencontrent pas. La 0-chaîne

$$\sum_{y \in X, y < x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) y - \sum_{y \in X, y > x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) y$$

représente dans  $H_0(\mathbf{R}^2; \mathbf{Z})$  l'intersection des deux cercles «immergés»  $\alpha(C_1)$  et  $\alpha(C_2)$ ; on a donc la relation suivante:

$$(3.1) \quad \sum_{y \in X, y < x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) = \sum_{y \in X, y > x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a).$$

3.2. Soient maintenant  $x$  et  $y$  deux points de  $X$  avec  $e(x, y) = 0$  et  $x < y$ . On pose  $\alpha^{-1}(x) = \{\xi, \xi^*\}$  et  $\alpha^{-1}(y) = \{\eta, \eta^*\}$  avec  $\xi < \xi^*$  et  $\eta < \eta^*$ . On a dans  $S^1 - \{a\}$  deux configurations possibles:

- 1)  $\xi < \eta < \eta^* < \xi^*$ ;
- 2)  $\xi < \xi^* < \eta < \eta^*$ .

*Premier cas* (figure 8).

En considérant l'intersection de  $\alpha(C_1)$  et  $\alpha(C_2)$  on obtient:

$$\sum_{z \in X, z < x} e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) = \sum_{z \in X, z > y} e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a).$$

On observe également que pour  $x < z < y$  on a  $e(x, z) e(y, z) = 0$ .

*Deuxième cas* (figure 9).

En considérant l'intersection de  $\alpha(C_1)$  et  $\alpha(C_2)$  on obtient cette fois:

$$\sum_{z \in X, x < z < y} e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) = 0$$

et l'on observe que pour  $z < x$  ou  $z > y$  on a  $e(x, z) e(y, z) = 0$ .

Supposons encore  $x < y$  mais ne supposons plus  $e(x, y) = 0$ , il résulte de ce qui précède que l'on a dans tous les cas les relations suivantes:

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} & \sum_{z \in X, z < x} (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) \\ &= \sum_{z \in X, z > y} (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a); \end{aligned}$$

$$(3.2.2) \quad \sum_{z \in X, x < z < y} (1 - e(x, y)) e(x, z) e(y, z) \varepsilon_z(s_a) = 0.$$

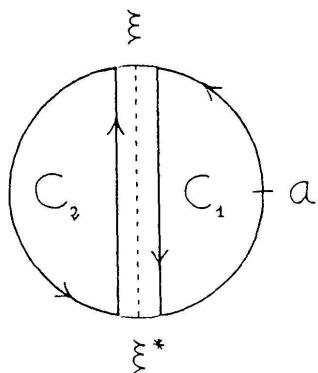


FIGURE 7

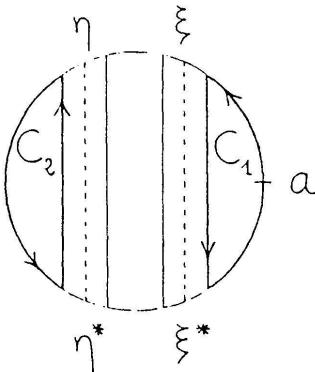


FIGURE 8

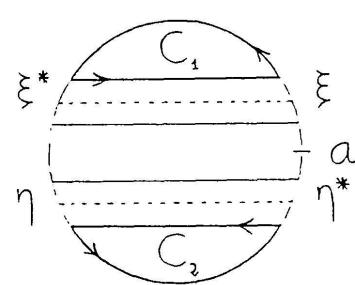


FIGURE 9

#### 4. EXPRESSION DES INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3 EN TERMES DE POINTS DE CROISEMENT

Soient  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant des nœuds et  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On note encore abusivement  $f: S = S(\alpha) \rightarrow A$  l'application induite par l'invariant  $f$ . On continue à utiliser les notations du paragraphe 2.

##### 4.1. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 1

**PROPOSITION 4.1.** *Tout invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 est nul. (Rappelons que nous supposons qu'un invariant est nul sur le nœud trivial.)*

*Démonstration.* Soient  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1 et  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On fixe une origine  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ . L'application  $f: S = S(\alpha) \rightarrow A$ , qui est de degré inférieur ou égal à 1, est de la forme:

$$f(s) = c_\emptyset + \sum_{x \in X} \delta_{s_a, x}(s) c_x$$

(notations du paragraphe 2). Le coefficient  $c_\emptyset = f(s_a)$  est nul; on montre qu'il en est de même pour les coefficients  $c_x$  de la façon suivante. Soient  $s_1$

et  $s_2$  les sections descendantes correspondant aux composantes connexes de  $S^1 - \tilde{X}$  adjacentes à un point  $\xi$  de  $\tilde{X}$ , on a:

- $s_2 - s_1 = \alpha(\xi)$ ;
- $f(s_2) - f(s_1) = \pm c_{\alpha(\xi)}$ ;
- $f(s_1) = 0$  et  $f(s_2) = 0$ .

### COMMENTAIRES

On peut voir directement 4.1 comme un corollaire de 1.4 et la démonstration ci-dessus peut sembler bien compliquée. En fait le sous-paragraphe 4.1 n'est là que pour assurer la cohérence idéologique du paragraphe 4.

## 4.2. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 2

Soient  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 2 et  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On considère à nouveau l'application  $f: S = S(\alpha) \rightarrow A$ , de degré inférieur ou égal à 2, induite par l'invariant  $f$ .

On fixe une origine  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ . Soit  $P = \{x, y\}$  une partie à 2 éléments de  $X$  avec  $x < y$  (pour la relation d'ordre sur  $X$  définie par  $\alpha$ ), on pose:

$$(4.2.1) \quad \lambda_{a, P}(s) = -\delta_{s_a, x}(s)(1 - \delta_{s_a, y}(s))\varepsilon_x(s_a)\varepsilon_y(s_a).$$

Compte tenu de (2.1),  $\lambda_{a, P}(s)$  peut être également défini par:

$$(4.2.2) \quad 4\lambda_{a, P}(s) = (\varepsilon_x(s) - \varepsilon_x(s_a))(\varepsilon_y(s) + \varepsilon_y(s_a)).$$

On note enfin  $\mathcal{P}_2(X)$  l'ensemble des parties à 2 éléments de  $X$ . La proposition ci-dessous généralise pour tout groupe abélien  $A$  la première formule du théorème 4 de [La] qui correspond au cas  $A = \mathbf{Z}/2$ :

**PROPOSITION 4.2.3.** *L'application  $f: S \rightarrow A$  est donnée par la formule*

$$f(s) = \left( \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a, P}(s) \right) f(T).$$

*Démonstration.* La proposition 1.5 (a) et la proposition 2.5 donnent:

**PROPOSITION 4.2.4.** *Pour tout  $P$  dans  $\mathcal{P}_2(X)$  et tout  $s$  dans  $S$  on a*

$$(\Delta_P f)(s) = e(P) \varepsilon_P(s) f(T).$$

A partir de là, la démonstration de la proposition 4.2.3 est essentiellement la même que celle de [La]. D'après 2.3 on a

$$\begin{aligned} f(s) &= f(s_a) + \sum_{z \in X} \delta_{s_a, z}(s) (\Delta_z f)(s_a) \\ &\quad + \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} \delta_{s_a, P}(s) (\Delta_P f)(s_a), \end{aligned}$$

ou encore, puisque  $f(s_a)$  est nul et  $(\Delta_P f)(s_a)$  égal à  $e(P) \varepsilon_P(s_a) f(T)$ ,

$$(4.2.5) \quad \begin{aligned} f(s) &= \sum_{z \in X} \delta_{s_a, z}(s) f(s_a + z) \\ &\quad + \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} \delta_{s_a, P}(s) e(P) \varepsilon_P(s_a) f(T). \end{aligned}$$

Tout se ramène donc au calcul de  $f(s_a + z)$ .

Soient  $z_-$  et  $z_+$  les composantes connexes de  $S^1 - \tilde{X}$  respectivement adjacentes à gauche et à droite à  $\inf \alpha^{-1}(z)$ . On vérifie:

$$(4.2.6) \quad (s_{z_-} - s_a)(r) e(r, z) = \begin{cases} e(r, z) & \text{si } r < z \\ 0 & \text{si } r > z; \end{cases}$$

$$s_{z_+} - s_{z_-} = z.$$

Avec (4.2.5) ces deux formules impliquent la suivante:

$$f(s_{z_+}) - f(s_{z_-}) = f(s_a + z) + \sum_{r \in X, r < z} e(r, z) \varepsilon_r(s_a) \varepsilon_z(s_a) f(T).$$

Compte tenu de  $f(s_{z_-}) = 0$  et  $f(s_{z_+}) = 0$ , il vient

$$f(s_a + z) = - \sum_{r \in X, r < z} e(r, z) \varepsilon_r(s_a) \varepsilon_z(s_a) f(T).$$

D'où le résultat.

Voici maintenant la version «entièr»e du paragraphe 5 de [La].

On oublie qu'il existe des invariants de Vassiliev de degré 2 à valeurs dans  $\mathbf{Z}$  et on considère *a priori* l'expression  $\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a, P}(s)$ .

**PROPOSITION 4.2.6.** *La somme  $\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a, P}(s)$  est indépendante du choix de  $a$ .*

*Démonstration.* Soient  $\iota$  le plus petit élément de  $\tilde{X}$  pour la relation d'ordre induite par celle de  $S^1 - \{a\}$  et  $b$  un point dans la composante connexe de  $S^1 - \tilde{X}$  adjacente à droite à  $\iota$ ; il faut montrer:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a, P}(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{b, P}(s).$$

On pose  $i = \alpha(\iota)$ ; on a donc  $\iota = s_a(i)$  et  $i = \inf X$  (pour la relation d'ordre sur  $X$  définie par  $a$ ). Soit  $P$  une partie à 2 éléments de  $X$ . Si  $i \notin P$  alors  $\lambda_{b, P}(s) = \lambda_{a, P}(s)$ . Si  $i \in P$  et si  $e(P) = 1$  alors  $\lambda_{b, P}(s) - \lambda_{a, P}(s) = \delta_{s_a, i}(s) \varepsilon_P(s_a)$ . On a par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{b,P}(s) - \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}(s) \\ = \delta_{s_a, i}(s) \varepsilon_i(s_a) \sum_{x \in X - \{i\}} e(i, x) \varepsilon_x(s_a). \end{aligned}$$

Or cette dernière somme est nulle d'après (3.1).

On pose:

$$(4.2.7) \quad V_2(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}(s).$$

**THÉORÈME 4.2.8.** *L'entier  $V_2(s)$  est un invariant de la classe d'isotopie du nœud  $\varphi_s$ .*

*Démonstration.* On vient d'assigner à tout diagramme de nœud  $(\alpha; s)$  un entier  $V_2(\alpha; s) = V_2(s)$ . Il s'agit de vérifier que  $V_2(\alpha; s)$  est invariant par les trois mouvements de Reidemeister.

L'invariance par le mouvement I (figure 10) est immédiate: un point double qui n'est enlacé avec aucun autre n'intervient pas au second membre de (4.2.7).

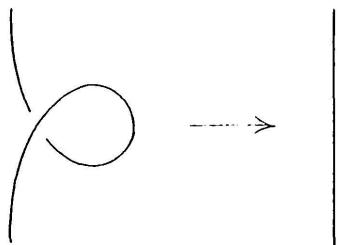


FIGURE 10

La vérification de l'invariance par les mouvements II et III (figures 11 et 12) est aisée parce que dans la formule (4.2.7) on a le choix de l'origine  $a$ .

On considère les figures 11 et 12; dans les deux cas la projection du mouvement de Reidemeister donne une isotopie régulière entre  $\alpha$  et une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$  que l'on note  $\beta$ .

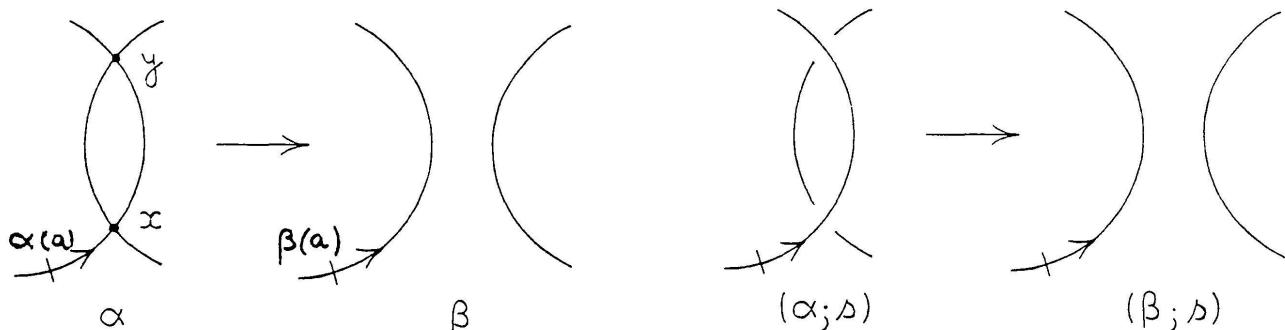


FIGURE 11

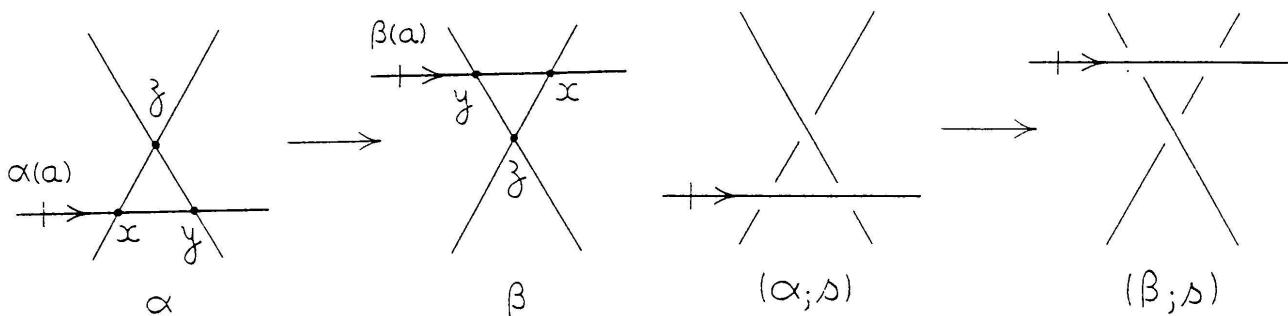


FIGURE 12

Dans le cas II les ensembles  $X(\beta)$  et  $\tilde{X}(\beta)$  s'identifient respectivement à  $X(\alpha) - \{x, y\}$  et  $\tilde{X}(\alpha) - \alpha^{-1}(\{x, y\})$ ;  $S(\beta)$  s'identifie donc à un sous-ensemble de  $S(\alpha)$ .

Dans le cas III on peut identifier  $\tilde{X}(\beta)$  à  $\tilde{X}(\alpha)$  et  $X(\beta)$  à  $X(\alpha)$  «en suivant les points doubles par continuité»;  $S(\beta)$  s'identifie donc à  $S(\alpha)$ .

Dans les deux cas l'égalité  $V_2(\alpha; s) = V_2(\beta; s)$  résulte de ce que  $\lambda_{\alpha, P}(s)$  est nul si  $x$  ou  $y$  appartient à  $P$ , pour le choix indiqué de  $\alpha$ .

On note encore  $V_2: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  l'invariant des nœuds qui vient d'être défini. Il est clair qu'il s'agit d'un invariant de Vassiliev de degré 2. La proposition 4.2.3, ou plus directement les propositions 4.1 et 4.2.4 et le fait que  $V_2(T)$  vaut 1, impliquent:

**PROPOSITION 4.2.9.** *Soit  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev d'ordre inférieur ou égal à 2. Alors:*

$$f(K) = V_2(K) f(T).$$

#### COMMENTAIRES

Soit  $C_K(t)$  le polynôme de Conway d'un nœud  $K$  [Co];  $C_K(t)$  est un polynôme pair à coefficients entiers:

$$C_K(t) = 1 + c_2(K) t^2 + c_4(K) t^4 + \dots .$$

Bar-Natan a montré (voir par exemple [Ba]) que le coefficient  $c_{2n}$  est un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à  $2n$ . La proposition 4.2.9 montre que les invariants  $c_2$  et  $V_2$  coïncident ( $C_T(t) = 1 + t^2$ ).

La théorie que nous avons faite de l'invariant  $V_2$  est à comparer à celle du chapitre III de [Ka].

VARIANTES DE L'EXPRESSION DE  $V_2$ 

Si dans la démonstration de 4.2.3 on remplace  $\inf \alpha^{-1}(z)$  par  $\sup \alpha^{-1}(z)$  on obtient:

$$f(s) = \left( \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}^*(s) \right) f(T)$$

avec  $\lambda_{a,P}^*(s) = - (1 - \delta_{s_a,x}(s)) \delta_{a,y}(s) \varepsilon_x(s_a) \varepsilon_y(s_a)$ , c'est-à-dire  $\lambda_{a,P}^*(s) = \lambda_{a,P}(s^*)$ . On a donc aussi

$$(4.2.10) \quad V_2(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}^*(s).$$

L'égalité

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \lambda_{a,P}^*(s)$$

est en fait équivalente à (3.1). On a en effet

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) (\lambda_{a,P}(s) - \lambda_{a,P}^*(s)) = \sum_{x \in X} \delta_{s_a,x}(s) c_x$$

avec

$$c_x = \varepsilon_x(s_a) \left( \sum_{y \in X, y < x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) - \sum_{y \in X, y > x} e(x, y) \varepsilon_y(s_a) \right).$$

Le fait que  $V_2$  puisse s'exprimer à la fois par les formules (4.2.7) et (4.2.10) a une explication plus conceptuelle. Cela traduit deux propriétés de cet invariant:

- $V_2(K^*) = V_2(K)$  (nous dirons que l'invariant  $V_2$  est pair);
- $V_2(\bar{K}) = V_2(K)$ ,  $\bar{K}$  désignant le nœud obtenu à partir de  $K$  par composition à la source avec un difféomorphisme de  $S^1$  renversant l'orientation.

Ces égalités sont conséquence de la théorie du paragraphe 1: les invariants  $K \mapsto V_2(K) - V_2(K^*)$  et  $K \mapsto V_2(K) - V_2(\bar{K})$  sont triviaux parce que ce sont des invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 1.

Compte tenu de (2.1) ou (4.2.2), on a

$$2(\lambda_{a,P}(s) + \lambda_{a,P}^*(s)) = \varepsilon_P(s) - \varepsilon_P(s_a),$$

si bien que l'invariant  $V_2$  est encore donné par

$$(4.2.11) \quad 4V_2(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) (\varepsilon_P(s) - \varepsilon_P(s_a)),$$

ce qui en posant  $E(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_2(X)} e(P) \varepsilon_P(s)$  s'écrit

$$(4.2.12) \quad 4V_2(s) = E(s) - E(s_a).$$

Expliquons pourquoi une telle expression était prévisible. Considérons l'application  $f: S \rightarrow \mathbf{Z}$  induite par un invariant de Vassiliev de degré 2, à

valeurs dans  $\mathbf{Z}$ , dont la fonction de poids est  $W_2$  (voir proposition 1.5 (a)). D'après ce que nous avons dit au paragraphe 2 il existe des entiers  $c_x, x$  parcourant  $X$ , et  $c_\emptyset$  tels que l'on a

$$4f(s) = E(s) + \sum_{x \in X} c_x \varepsilon_x(s) + c_\emptyset.$$

Comme nous avons vu ci-dessus que  $f$  doit être paire ( $f(s) = f(s^*)$ ) les  $c_x$  sont nuls; comme  $f(s_a)$  doit être nul  $c_\emptyset$  vaut  $-E(s_a)$ .

Voici pour terminer une application amusante de (4.2.11):

**PROPOSITION 4.2.13.** *Soit  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . Soit  $\omega$  le point de  $S(\alpha)$  défini par  $\varepsilon_x(\omega) = 1$  pour tout  $x$  dans  $X(\alpha)$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $\alpha$  possède deux points doubles enlacés;
- (ii)  $V_2(\varphi_\omega) > 0$ ;
- (iii) il existe un nœud au-dessus de  $\alpha$  qui est non trivial.

*Démonstration de l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii).* Pour tout  $P$  dans  $\mathcal{P}_2(X)$  et tout  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$  le terme  $\varepsilon_P(\omega) - \varepsilon_P(s_a)$  qui apparaît dans l'expression (4.2.11) de  $V_2(\varphi_\omega)$  vaut 0 ou 2. Il faut donc montrer que (i) implique en fait qu'il existe  $P$  et  $a$  avec  $e(P) = 1$  et  $\varepsilon_P(s_a) = -1$ . Soient  $x$  et  $y$  deux points doubles enlacés de  $\alpha$ . Choisissons  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$  de façon à ce que  $x$  soit le plus petit des points doubles pour l'ordre induit sur  $X$ ; la relation (3.1) devient  $\sum_{z \in X - \{x\}} e(x, z) \varepsilon_z(s_a) = 0$ . Il existe donc  $y'$  dans  $X - \{x\}$  avec  $e(x, y') = 1$  et  $\varepsilon_y(s_a) + \varepsilon_{y'}(s_a) = 0$ . Ou  $\varepsilon_x(s_a) \varepsilon_y(s_a)$  ou  $\varepsilon_x(s_a) \varepsilon_{y'}(s_a)$  est égal à  $-1$ .

*Démonstration de l'implication (iii)  $\Rightarrow$  (i).* Si  $e(P) = 0$  pour tout  $P$  dans  $\mathcal{P}_2(X)$  alors tout diagramme de nœud au-dessus de  $\alpha$  peut être ramené au diagramme trivial par une succession de mouvements de Reidemeister de type I.

### 4.3. INVARIANTS DE VASSILIEV DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU ÉGAL À 3

#### HEURISTIQUE

Soit  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  un invariant de Vassiliev de degré 3 dont la fonction de poids est  $W_3$  (voir proposition 1.5 (b)). Comme l'invariant  $K \mapsto f(K) + f(K^*)$  est de degré inférieur ou égal à 2, on a d'après 4.2.9

$$f(K) + f(K^*) = (f(T) + f(T^*)) V_2(K),$$

ou encore

$$f(K) + f(K^*) = -2f(H)V_2(K)$$

(l'égalité  $f(K_4) = f(T) + f(T^*) + 2f(H)$  du paragraphe 1 montre que l'on a  $f(T) + f(T^*) = -2f(H)$  pour  $f$  de degré inférieur ou égal à 3); il en résulte que l'invariant  $f + f(H)V_2$  est impair (change de signe quand on remplace  $K$  par  $K^*$ ). On peut donc supposer sans perdre de généralité que  $f$  est impair ce que nous ferons ci-dessous.

Soit  $\alpha$  une immersion générique de  $S^1$  dans  $\mathbf{R}^2$ . On considère toujours l'application  $f: S = S(\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}$  induite par l'invariant  $f$ ; elle est de degré inférieur ou égal à 3 et impaire ( $f(s^*) = -f(s)$ ).

Soit  $P = \{x, y, z\}$  une partie à 3 éléments de  $X$ . On pose  $w(P) = \sup(N-1, 0)$ ,  $N$  désignant le nombre de paires, contenues dans  $P$ , de points enlacés. En d'autres termes on pose:

$$\begin{aligned} w(P) = & e(x, y)e(x, z) + e(y, x)e(y, z) + e(z, x)e(z, y) \\ & - e(x, y)e(x, z)e(y, z); \end{aligned}$$

$w(\{x, y, z\})$  sera également noté  $w(x, y, z)$ . Dans le langage de [Ba],  $\alpha^{-1}(P)$  est un diagramme à 3 cordes; on a avec le symbolisme de cet article:

$$w(\text{---}) = 1 \quad , \quad w(\text{---}) = 2$$

et  $w$  est nul sur les trois autres éléments de  $\mathcal{D}_3$ .

On pose enfin

$$W(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) \varepsilon_P(s),$$

$\mathcal{P}_3(X)$  désignant le nombre de parties à 3 éléments de  $X$ .

Comme précédemment  $8f$  s'écrit

$$8f(s) = W(s) + \sum_{Q \in \mathcal{P}_2(X)} c_Q \varepsilon_Q(s) + \sum_{x \in X} c_x \varepsilon_x(s) + c_\emptyset,$$

et puisque  $f$  est impaire les coefficients  $c_Q$  et  $c_\emptyset$  sont nuls:

$$8f(s) = W(s) + \sum_{x \in X} c_x \varepsilon_x(s).$$

On détermine les coefficients  $c_x$  de la façon suivante. On fixe une origine  $a$  dans  $S^1 - \tilde{X}$ . On considère comme au paragraphe précédent les composantes connexes  $x_-$  et  $x_+$  de  $S^1 - \tilde{X}$  respectivement adjacentes à gauche et à droite à  $\inf \alpha^{-1}(x)$ . Compte tenu de  $f(s_{x_-}) = 0$  et  $f(s_{x_+}) = 0$ , il vient

$$(4.3.1) \quad c_x = (W(s_{x_+}) - W(s_{x_-})) / 2\varepsilon_x(s_{x_-});$$

il est clair que ce quotient est entier.

*Remarque.* Posons  $s_- = s_{x_-}$ ,  $s_+ = s_{x_+}$  et introduisons également les sections descendantes  $s'_+$  et  $s'_-$  correspondant aux composantes connexes de  $S^1 - \tilde{X}$  respectivement adjacentes à gauche et à droite à  $\sup \alpha^{-1}(x)$ . On obtient pareillement

$$c_x = (W(s'_+) - W(s'_-)) / 2\varepsilon_x(s'_-) = - (W(s'_+) - W(s'_-)) / 2\varepsilon_x(s'_+) .$$

On doit donc avoir

$$W(s_+) - W(s_-) + W(s'_+) - W(s'_-) = 0 .$$

En fait cette relation est conséquence de (3.2.1) et (3.2.2).

L'explicitation de (4.3.1) donne

$$(4.3.2) \quad 8f(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) \mu_{a, P}(s)$$

en posant

$$\begin{aligned} \mu_{a, \{x, y, z\}}(s) &= \varepsilon_x(s) \varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s) - \varepsilon_x(s) \varepsilon_y(s_{x_-}) \varepsilon_z(s_{x_-}) \\ &\quad - \varepsilon_x(s_{y_-}) \varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s_{y_-}) - \varepsilon_x(s_{z_-}) \varepsilon_y(s_{z_-}) \varepsilon_z(s) . \end{aligned}$$

A l'aide de (4.2.6) et des relations d'intersection du paragraphe 3 l'expression (4.3.2) se transforme en

$$(4.3.3) \quad 8f(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{a, P}(s) ,$$

le terme  $v_{a, P}(s)$  étant défini de la façon suivante. On écrit  $P = \{x, y, z\}$  avec  $x < y < z$  (toujours pour la relation d'ordre sur  $X$  définie par  $a$ ) et on pose

$$(4.3.4) \quad \begin{aligned} v_{a, P}(s) &= \varepsilon_x(s) \varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s) - \varepsilon_x(s) \varepsilon_y(s_a) \varepsilon_z(s_a) \\ &\quad + \varepsilon_x(s_a) \varepsilon_y(s) \varepsilon_z(s_a) - \varepsilon_x(s_a) \varepsilon_y(s_a) \varepsilon_z(s) . \end{aligned}$$

On a encore:

$$(4.3.5) \quad \begin{aligned} v_{a, P}(s) &= 4(\varepsilon_x(s) \lambda_{a, \{y, z\}}(s) - \varepsilon_y(s) \lambda_{a, \{x, z\}}(s) \\ &\quad + \varepsilon_z(s) \lambda_{a, \{x, y\}}(s)) . \end{aligned}$$

## THÉORIE «AB INITIO» DE L'INVARIANT $V_3$

On oublie maintenant l'heuristique précédente (voilà pourquoi nous n'avons pas détaillé le passage de (4.3.2) à (4.3.3)) et on considère *a priori* le second membre de (4.3.3).

**PROPOSITION 4.3.6.** *La somme  $\sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{a, P}(s)$  est indépendante du choix de  $a$ .*

*Démonstration.* On reprend les notations de la démonstration de la proposition 4.2.6. Il faut montrer:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{a,P}(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{b,P}(s).$$

Soit  $P$  une partie à 3 éléments de  $X$ . Si  $i$  n'appartient pas à  $P$  alors  $v_{a,P}(s)$  et  $v_{b,P}(s)$  coïncident. On suppose maintenant que  $i$  appartient à  $P$ . On suppose tout d'abord que  $w(P)$  est non nul. On écrit  $P = \{i, x, j\}$  avec  $i < x < j$  pour l'ordre sur  $X$  défini par  $a$ . Pour l'ordre défini par  $b$ , on a:  $x < j < i$  ou  $x < i < j$ , suivant que  $i$  et  $j$  sont enlacés ou non. Dans le premier cas  $v_{a,P}(s)$  et  $v_{b,P}(s)$  coïncident à nouveau; dans le second on a

$$v_{b,P}(s) - v_{a,P}(s) = 2(\varepsilon_i(s) \varepsilon_j(s_a) + \varepsilon_i(s_a) \varepsilon_j(s)) \varepsilon_x(s_a).$$

Il en résulte dans les deux cas:

$$\begin{aligned} & w(P)(v_{b,P}(s) - v_{a,P}(s)) \\ &= 2(\varepsilon_i(s) \varepsilon_j(s_a) + \varepsilon_i(s_a) \varepsilon_j(s))(1 - e(i,j)) e(i,x) e(j,x) \varepsilon_x(s_a). \end{aligned}$$

On observe ensuite que cette relation est encore vérifiée si  $w(P)$  est nul. On conclut alors à l'aide de la relation d'intersection (3.2.2).

On pose (provisoirement, la notation définitive sera canonisée après 4.3.8):

$$g(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P) v_{a,P}(s).$$

**THÉORÈME 4.3.7.** *L'entier  $g(s)$  est un invariant de la classe d'isotopie du noeud  $\phi_s$ .*

*Démonstration.* On reprend les notations de la démonstration du théorème 4.2.8. La raison de l'invariance par le mouvement I est identique. Pour vérifier l'invariance par les mouvements II et III on choisit l'origine  $a$  de la même façon et on utilise l'expression (4.3.5) du terme  $v_{a,P}(s)$ .

*Invariance par le mouvement II (figure 11).*

On a

$$\begin{aligned} & g(\alpha; s) - g(\beta; s) \\ &= 4 \sum_{Q \in \mathcal{P}_2(X - \{x, y\})} (w(\{x\} \cup Q) \varepsilon_x(s_a) + w(\{y\} \cup Q) \varepsilon_y(s_a)) \lambda_{a,Q}(s). \end{aligned}$$

et l'on conclut en observant que l'on a:

- $w(\{x\} \cup Q) = w(\{y\} \cup Q);$
- $\varepsilon_x(s_a) + \varepsilon_y(s_a) = 0.$

*Invariance par le mouvement III (figure 12).*

En accord avec les identifications dont nous avons convenues, nous posons  $X = X(\alpha) = X(\beta)$ . Les applications de  $X(\alpha) \times S(\alpha)$  et  $X(\beta) \times S(\beta)$  dans  $\{\pm 1\}$ ,  $(x, s) \mapsto \varepsilon_x(s)$ , sont identifiées. Par contre les applications

$$\begin{aligned} e: \mathcal{P}_2(X(\alpha)) &\rightarrow \{0, 1\} \quad \text{et} \quad e: \mathcal{P}_2(X(\beta)) \rightarrow \{0, 1\}, \\ w: \mathcal{P}_3(X(\alpha)) &\rightarrow \{0, 1, 2\} \quad \text{et} \quad w: \mathcal{P}_3(X(\beta)) \rightarrow \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

différent; nous les notons ci-dessous  $e_\alpha$  et  $e_\beta$ ,  $w_\alpha$  et  $w_\beta$ .

On a par inspection:

$$\begin{aligned} g(\beta; s) - g(\alpha; s) &= \sum_{r \in X - \{x, y, z\}} \\ ((w_\beta(x, z, r) - w_\alpha(x, z, r)) \varepsilon_x(s_\alpha) + (w_\beta(y, z, r) - w_\alpha(y, z, r)) \varepsilon_y(s_\alpha)) \\ \lambda_{\alpha, \{z, r\}}(s). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que l'on a

$$\begin{aligned} (w_\beta(x, z, r) - w_\alpha(x, z, r)) \varepsilon_x(s_\alpha) \\ + (w_\beta(y, z, r) - w_\alpha(y, z, r)) \varepsilon_y(s_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

pour tout  $r$  dans  $X - \{x, y, z\}$ .

Pour cela on écrit

$$w(-, z, r) = e(-, r) e(z, r) + e(z, r) e(z, -) + (1 - e(z, r)) e(z, -) e(r, -)$$

et l'on fait les observations suivantes:

- Les enlacements  $e_\alpha(-, r)$  et  $e_\beta(-, r)$  coïncident.
- En considérant la relation d'intersection (3.1) à la fois pour  $\alpha$  et  $\beta$ , on obtient

$$e_\alpha(z, x) \varepsilon_x(s_\alpha) + e_\alpha(z, y) \varepsilon_y(s_\alpha) = e_\beta(z, x) \varepsilon_x(s_\alpha) + e_\beta(z, y) \varepsilon_y(s_\alpha).$$

- De même en considérant la relation d'intersection (3.2.1) à la fois pour  $\alpha$  et  $\beta$ , on obtient

$$\begin{aligned} (1 - e_\alpha(z, r)) e_\alpha(z, x) e_\alpha(r, x) \varepsilon_x(s_\alpha) + (1 - e_\alpha(z, r)) e_\alpha(z, y) e_\alpha(r, y) \varepsilon_y(s_\alpha) \\ = (1 - e_\beta(z, r)) e_\beta(z, x) e_\beta(r, x) \varepsilon_x(s_\alpha) + (1 - e_\beta(z, r)) e_\beta(z, y) e_\beta(r, y) \varepsilon_y(s_\alpha). \end{aligned}$$

*Remarque* (suscitée par une discussion avec G. Masbaum). Considérons pour  $k = 1$  et  $2$  les sommes:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_3(X), w(P) = k} \mu_{\alpha, P}(s).$$

La démonstration de 4.3.6 montre en fait que ces sommes sont indépendantes de  $\alpha$  si bien que l'on peut poser:

$$g_{(k)}(\alpha; s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X), w(P) = k} \mu_{\alpha, P}(s)$$

et écrire  $g(\alpha; s) = g_{(1)}(\alpha; s) + 2g_{(2)}(\alpha; s)$ .

La démonstration ci-dessus montre que  $g_{(1)}(\alpha; s)$  et  $g_{(2)}(\alpha; s)$  sont invariantes par les mouvements de Reidemeister I et II; par contre elles ne sont pas en général invariantes par III.

D'après (4.3.5) l'entier  $g(s)$  est divisible par 4. En fait:

**LEMME 4.3.8.** *L'entier  $g(s)$  est divisible par 8.*

*Démonstration.* Puisque  $g$  est nulle sur les sections descendantes il suffit de montrer que la valeur de  $g$  modulo 8 est constante.

Soient  $s$  un élément de  $S$  et  $x$  un élément de  $X$ ; on choisit  $a$  de telle sorte que  $x$  soit le plus petit élément de  $X$  pour l'ordre défini par  $a$ . On a:

$$\varepsilon_x(s)(g(s) - g(s+x)) = 2 \sum_{Q \in \mathcal{P}_2(X - \{x\})} w(\{x\} \cup Q)(\varepsilon_Q(s) - \varepsilon_Q(s_a)).$$

Il faut donc vérifier que la somme au second membre, disons  $G_x(s)$ , est divisible par 4. On pose  $Q = \{y, z\}$  avec  $y < z$ ; grâce à la congruence:

$$\varepsilon_y(s)\varepsilon_z(s) - \varepsilon_y(s_a)\varepsilon_z(s_a) \equiv \varepsilon_y(s)\varepsilon_z(s_a) - \varepsilon_y(s_a)\varepsilon_z(s) \pmod{4},$$

il vient:  $G_x(s) \equiv H_x(s) \pmod{4}$ , en posant:

$$H_x(s) = \sum_{(y, z) \in (X - \{x\})^2, y < z} w(x, y, z)(\varepsilon_y(s)\varepsilon_z(s_a) - \varepsilon_y(s_a)\varepsilon_z(s)).$$

Cette somme s'écrit  $\sum_{y \in X - \{x\}} \varepsilon_y(s) c_{x,y}$  en posant:

$$c_{x,y} = \sum_{z \in X - \{x, y\}, z > y} w(x, y, z)\varepsilon_z(s_a) - \sum_{z \in X - \{x, y\}, z < y} w(x, y, z)\varepsilon_z(s_a).$$

Comme  $H_x(s_a)$  est nul,  $H_x(s)$  s'écrit aussi  $\sum_{y \in X - \{x\}} (\varepsilon_y(s) - \varepsilon_y(s_a)) c_{x,y}$  et il suffit finalement de montrer que  $c_{x,y}$  est pair, c'est-à-dire:

$$\sum_{z \in X - \{x, y\}} w(x, y, z) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Cette congruence résulte encore des relations d'intersections du paragraphe 3 (écrire  $w(x, y, z) = (1 - e(x, y))e(x, z)e(y, z) + e(x, y)e(y, z) + e(x, y)e(x, z)$ ).

On note enfin  $V_3$  l'application de  $S$  dans  $\mathbf{Z}$  définie par la formule:

$$(4.3.9) \quad 8V_3(s) = \sum_{P \in \mathcal{P}_3(X)} w(P)v_{a,P}(s).$$

Comme au paragraphe 4, on note encore  $V_3: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{Z}$  l'invariant des noeuds associé. Il est clair qu'il s'agit d'un invariant de Vassiliev de degré 3.

**PROPOSITION 4.3.10.** *Soit  $f: \mathcal{N} \rightarrow A$  un invariant de Vassiliev d'ordre inférieur ou égal à 3. Alors:*

$$f(K) = V_3(K)(f(T) + f(H)) - V_2(K)f(H).$$

*Si la multiplication par 2 est injective dans  $A$ , cette formule peut encore s'écrire:*

$$f(K) = V_3(K)((f(T) - f(T^*))/2) + V_2(K)((f(T) + f(T^*))/2)$$

*(les éléments de  $A$ ,  $f(T) - f(T^*)$  et  $f(T) + f(T^*)$ , sont uniquement divisibles par 2).*

*Démonstration.* La proposition 1.5 (b) et la proposition 2.5 donnent:

PROPOSITION 4.3.11. *Soit  $P$  une partie à trois éléments de  $X$ . On a:*

$$(\Delta_P f)(s) = w(P) \varepsilon_P(s) (f(T) + f(H)) .$$

Il en résulte que l'invariant  $K \mapsto f(K) - V_3(K)(f(T) + f(H))$  est de degré inférieur ou égal à 2. On applique alors 4.2.9. Pour conclure il suffit de savoir que  $V_3(T)$  vaut 1 ce qu'on vérifie par exemple avec le diagramme de la figure 1 (la somme au second membre de (4.3.9) ne contient dans ce cas qu'un terme).

## COMMENTAIRES

Soit  $J_K(t)$  le polynôme de Jones d'un nœud  $K$  [Jo] (rappelons que  $J_K(t)$  appartient à  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ ); on considère dans  $\mathbf{Q}[[u]]$  la série formelle:

$$J_K(e^u) = 1 + j_1(K)u + j_2(K)u^2 + j_3(K)u^3 + \dots .$$

Birman et Lin, et Bar-Natan, ont montré que le coefficient  $j_n$  est un invariant de Vassiliev de degré inférieur ou égal à  $n$  [BL] [Ba]; l'égalité  $J_{K^*}(t) = J_K(t^{-1})$  se traduit par le fait que  $j_n$  est pair si  $n$  est pair et impair si  $n$  est impair. La proposition 4.3.10 donne (rappelons que l'on a  $J_T(t) = t + t^3 - t^4$ )

$$J_K(e^u) \equiv 1 - 3V_2(K)u^2 - 6V_3(K)u^3 \pmod{u^4},$$

ou encore

$$J_K(t) \equiv 1 - 3V_2(K)(t-1)^2 + 3(V_2(K) - 2V_3(K))(t-1)^3 \pmod{(t-1)^4},$$

ou enfin

$$J_K^{(2)}(1) = -6V_2(K); \quad J_K^{(3)}(1) = 18(V_2(K) - 2V_3(K)).$$

## RÉFÉRENCES

- [Ba] BAR-NATAN, D. On the Vassiliev knot invariants. Preprint 1992.
- [BL] BIRMAN, J.S. and X.S. LIN. Knot polynomials and Vassiliev's invariants. *Invent. Math.* 111 (1993), 225-570.
- [Co] CONWAY, J. H. *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties.* Computational problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 1970.
- [Jo] JONES, V.F.R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Annals of Math.* 126 (1987), 335-388.
- [Ka] KAUFFMAN, L.H. *On knots.* Annals of Mathematical Studies 115, Princeton University Press (1987).
- [La] LANNES, J. Sur l'invariant de Kervaire des nœuds classiques. *Comment. Math. Helvetici* 60 (1985), 179-192.

(Reçu le 13 mai 1993)

Jean Lannes

Centre de Mathématiques Ecole Polytechnique 91128 Palaiseau Cedex (France)	et	U.F.R. de Mathématiques Université de Paris VII Tour 45-55, 2 Place Jussieu 75251 Paris-Cedex 05 (France)
---	----	---