Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE VERSION NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES DE LIE: LES ALGÈBRES DE LEIBNIZ

Autor: Loday, Jean-Louis

Kapitel: 10. HOMOLOGIE NON COMMUTATIVE DES GROUPES ET K-THÉORIE DES CORPS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60428

10. Homologie non commutative des groupes et K-théorie des corps

10.1. *Théorie HL pour les groupes.* Il semble tout à fait raisonnable de penser qu'il existe une théorie HL pour la catégorie des groupes.

Voici quelques-unes des propriétés que l'on peut espérer des groupes abéliens $HL_n(G)$ lorsque G est un groupe.

(a) $HL_0(G) = \mathbf{Z}$, $HL_1(G) = G/[G, G]$.

(b) Il existe une application naturelle

$$\varphi : HL_n(G) \to H_n(G), \quad n \geqslant 0 .$$

(c) Si G est abélien $HL_n(G_{\mathbf{Q}}) \cong (G_{\mathbf{Q}})^{\otimes n}$ et l'application φ est le passage au quotient

$$(G_{\mathbf{Q}})^{\otimes n} \to \Lambda^n(G_{\mathbf{Q}}) .$$

(d) Pour deux groupes G et G' on a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$HL_*(G \times G')_{\mathbf{Q}} \cong HL_*(G)_{\mathbf{Q}} * HL_*(G')_{\mathbf{Q}} ,$$

où $*$ est l'opération décrite en 6.7.

(e) Pour tout anneau A il existe un groupe abélien gradué $KL_*(A)$ tel que

$$HL_*(GL(A))_{\mathbf{Q}}) \cong T(KL_*(A)_{\mathbf{Q}}) .$$

(f) Pour tout corps F on a

$$KL_2(F) \cong HL_2(SL(F)) \cong F^\times \wedge F^\times .$$

Il est aussi raisonnable de conjecturer l'existence d'une transformation naturelle $KL_* \to K_*$ (= K-théorie algébrique) induisant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
HL_*(GL(A))_{\mathbf{Q}} & \to & H_*(GL(A))_{\mathbf{Q}} \\
\| \wr & & \| \wr \\
T(KL_*(A)_{\mathbf{Q}}) & \to & \Lambda(K_*(A)_{\mathbf{Q}}) .
\end{array}$$

Remarquons que, rationnellement, la théorie KL serait complètement déterminée par la théorie HL. Cette théorie KL devrait être reliée aux conjectures de Lichtenbaum et Beilinson concernant le calcul de $K_*(F)_{\mathbf{Q}}$, où F est un corps, de la manière suivante.

10.2. *Les complexes* Γ. Lichtenbaum et Beilinson conjecturent l'existence, pour tout corps commutatif F, d'un complexe de groupes abéliens $\Gamma_F(n)$ de longueur $n-1$:

$$\Gamma_F(n)_1 \to \Gamma_F(n)_2 \to \cdots \to \Gamma_F(n)_n$$

tel que

$$K_p(F)_{\mathbb{Q}} \cong \bigoplus_{p=n-i+1} H_i(\Gamma_F(n))_{\mathbb{Q}} \, .$$

Pour $n = 1$ on prend $\Gamma_F(1)_1 = F^\times$, d'où $K_1(F)_{\mathbb{Q}} = (F^\times)_{\mathbb{Q}}$. Pour $n = 2$ Bloch a construit un complexe

$$\Gamma_F(2)\colon \mathscr{B}_2(F) \xrightarrow{d^\Gamma} F^\times \wedge F^\times, \; [x] \mapsto (1-x) \wedge x$$

où $\mathscr{B}_2(F)$ est le groupe abélien libre sur $F^\times - \{1\}$, modulo l'équation fonctionnelle du dilogarithme

$$[x] - [y] + \left[\frac{y}{x}\right] - \left[\frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right] + \left[\frac{1-x}{1-y}\right] \sim 0 \, .$$

Pour $n = 3$ un complexe $\Gamma_F(3)$ a été proposé par A. Goncharov [Go].

10.3. *Comparaison avec le cas additif.* Comparons ces conjectures avec le problème analogue où l'on a remplacé le groupe linéaire (d'un corps) par l'algèbre de Lie des matrices (d'une algèbre associative lisse). Il faut alors remplacer la K-théorie algébrique par l'homologie cyclique (car rationnellement $H_*(gl(A)) \cong \Lambda(HC_{*-1}(A))$, *cf.* [L-Q]). L'analogue additif de $\Gamma_F(n)$ est alors le complexe de de Rham tronqué

$$\Gamma_A^+(n)\colon A \xrightarrow{d} \Omega_A^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_A^{n-1} \, .$$

Autrement dit, rationnellement on a un isomorphisme

$$HC_{p-1}(A) \cong \Omega_A^{p-1}/d\Omega_A^{p-2} \oplus H_{DR}^{p-3}(A) \oplus H_A^{p-5}(A) \oplus \cdots \, .$$

Cette décomposition de l'homologie cyclique est la décomposition induite par les λ-opérations (*cf.* [L1]). C'est aussi ce que suppose la conjecture ci-dessus reliant K et l'homologie de Γ.

Dans ce contexte l'homomorphisme composé

$$HH_{n-1}(A) \cong \Omega_A^{n-1} \twoheadrightarrow H_{n-1}(\Gamma_A^+(n)) \hookrightarrow HC_{n-1}(A) \, ,$$

qui est l'application naturelle de l'homologie de Hochschild dans l'homologie cyclique, n'est autre que la restriction aux parties primitives de

$$\varphi\colon HL_n(gl(A)) \to H_n(gl(A)) \, .$$

Il est donc naturel de penser que, dans le contexte multiplicatif (i.e. GL),

$$\textit{le bon groupe} \quad \Gamma_F(n) \quad \textit{est} \quad KL_n(F) \; .$$

11. Intégrer les algèbres de Leibniz

Le problème consiste à définir des objets algébriques qui seraient aux algèbres de Leibniz ce que les groupes sont aux algèbres de Lie. Ces objets mythiques seront appelés, pour l'instant, des *coquecigrues.* Une coquecigrue G devrait être munie d'un «commutateur abstrait» $[-,-]: G \times G \to G$ ayant certaines des propriétés des commutateurs dans les groupes. Les groupes seraient des cas particuliers de coquecigrues et toute coquecigrue aurait un groupe universel associé G_{gr}. Les théories d'homologie HL_* et de cohomologie HL^* devraient s'étendre à la catégorie des coquecigrues et le groupe $HL^2(G,A)$ classifierait les extensions, dans la catégorie des coquecigrues, de G par A. En particulier il devrait y avoir au-dessus de $SL_n(F)$ une coquecigrue universelle fournissant une extension de $SL_n(F)$ par $F^\times \wedge F^\times$ pour $n \geqslant 5$.

L'une des relations attendues entre coquecigrues et algèbres de Leibniz est la suivante. Les commutateurs abstraits définissent une série centrale descendante dont le gradué associé est une algèbre de Leibniz (le crochet étant induit par le commutateur abstrait). Une coquecigrue libre doit donner une algèbre de Leibniz libre.

La catégorie homotopique des coquecigrues simpliciales devrait fournir un modèle entier de la théorie de l'homotopie non commutative décrite en 8.3.

Une coquecigrue munie d'une structure de variété (avec quelques compatibilités) serait un groupe de Leibniz, c'est-à-dire que l'espace tangent aurait une structure d'algèbre de Leibniz (on peut rêver).

BIBLIOGRAPHIE

[B-C] Baues, H. J. and D. Conduché. The central series for Peiffer commutators in groups with operators. *J. Algebra 133* (1990), 1-34.

[B] Brylinski, J.-L. Communication personnelle. Mars 1991.

[C-Q] Cuntz, J. and D. Quillen. Algebra extensions and nonsingularity. Preprint Heidelberg, 1992.

[C] Cuvier, C. Homologie de Leibniz et homologie de Hochschild. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris Sér. A-B 313* (1991), 569-572.

[F-L] Fiedorowicz, Z. and J.-L. Loday. Crossed simplicial groups and their associated homology. *Transactions A.M.S. 326* (1991), 57-87.