

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE VERSION NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES DE LIE: LES ALGÈBRES DE LEIBNIZ  
**Autor:** Loday, Jean-Louis  
**Kapitel:** 9. Homologie non commutative des algèbres associatives  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60428>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

de l'homotopie rationnelle «non commutative». Ceci amène immédiatement un certain nombre de questions naturelles: existence de modèles minimaux, analogue non commutatif des cogèbres cocommutatives, analogue des groupes simpliciaux (cf. 10 et 11), etc.

## 9. HOMOLOGIE NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES ASSOCIATIVES

Soit  $A$  une algèbre associative unitaire sur  $k$ . On suppose que  $k$  contient  $\mathbf{Q}$ . Les énoncés et conjectures qui suivent peuvent s'exprimer en utilisant comme coefficients un  $A$ -bimodule  $M$ , mais, pour simplifier, on prendra ici  $M = A$ .

9.1. *Rappel du cas classique* (cf. par exemple [L1]). Le complexe de Hochschild  $(C_*, b)$ , où  $C_n = A \otimes A^{\otimes n}$ , d'homologie  $HH_n(A)$ , possède les propriétés suivantes. Pour tout  $A$  les idempotents eulériens permettent de scinder  $C_n$  en

$$C_n = C_n^{(1)} \oplus C_n^{(2)} \oplus \dots \oplus C_n^{(n)}.$$

(9.1.1) Si  $A$  est commutative,  $C_*^{(1)}$  est un sous-complexe de  $C_*$ , et son homologie n'est autre que l'homologie de Harrison-André-Quillen.

(9.1.2) Si  $A$  est commutative et lisse sur  $k$ , alors  $HH_n^{(1)}(A) = 0$  pour  $n > 1$  et  $HH_1^{(1)}(A) = \Omega_{A/k}^1$ . Pour l'homologie de Hochschild on a alors le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg:

$$HH_*(A) \cong \Lambda_A(H_*^{(1)}(A)) = \Omega_{A/k}^*,$$

où  $\Omega_{A/k}^n$  désigne le module des  $n$ -formes différentielles de Kaehler.

(9.1.3) Le module  $C_n^{(n)}$  est isomorphe à  $A \otimes \Lambda^n A$  ( $M \otimes \Lambda^n A$  dans la version bimodule), et la restriction du bord de Hochschild  $b$  à  $C_n^{(n)}$  aboutit dans  $C_{n-1}^{(n-1)}$ . On a alors un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} C_n^{(n)} & \xrightarrow{b} & C_{n-1}^{(n-1)} \\ \parallel \wr & & \parallel \wr \\ A \otimes \Lambda^n A & \xrightarrow{d} & A \otimes \Lambda^{n-1} A, \end{array}$$

dans lequel  $d$  est le bord de Chevalley-Eilenberg (cf. 6.6) pour la structure d'algèbre de Lie de  $A$  donnée par  $[x, y] = xy - yx$ .

9.2. *Conjecture pour le cas non commutatif.* On conjecture qu'il existe un complexe  $CL_* = (CL_*(A), \tilde{b})$ , et donc des groupes d'homologie  $HL_*(A)$ , ayant les propriétés suivantes.

(9.2.0) Il existe une application naturelle non triviale

$$\mu: HL_*(A) \rightarrow HH_*(A) .$$

(9.2.1) Pour tout  $n$  le module  $CL_n$  admet une décomposition

$$CL_n = CL_n^{(1)} \oplus CL_n^{(2)} \oplus \dots \oplus CL_n^{(n)} .$$

Le complexe  $CL_*^{(1)}$  est un sous-complexe de  $CL_*$ , et son homologie est précisément l'homologie de Hochschild  $HH_n(A)$  pour  $n \geq 1$ .

(9.2.2) Si l'algèbre associative et unitaire  $A$  est *quasi-libre* au sens de Cuntz-Quillen (cf. [C-Q]), on sait que  $HH_n(A) = 0$  pour  $n > 1$ , et que  $HH_1(A) = A \otimes (A/k)$ . Adoptons les notations de Cuntz et Quillen:  $\Omega^n A := A \otimes (A/k)^{\otimes n}$  ( $n$ -formes différentielles non commutatives sur  $A$ ). La théorie  $HL$  devrait vérifier

$$HL_n(A) = T_A(H_*^{(1)}(A)) \stackrel{\cdot}{=} \Omega^n A .$$

(9.2.3) La composante  $CL_n^{(n)}$  devrait être isomorphe à  $A \otimes A^{\otimes n}$  (plus précisément  $M \otimes A^{\otimes n}$  dans la version bimodule), et on devrait avoir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CL_n^{(n)} & \xrightarrow{\tilde{b}} & CL_{n-1}^{(n-1)} \\ \parallel \wr & & \parallel \wr \\ A \otimes A^{\otimes n} & \xrightarrow{d} & A \otimes A^{\otimes n-1} , \end{array}$$

où  $d$  est le bord de Leibniz pour la structure de Leibniz de  $A$  donnée par  $[x, y] = xy - yx$ .

9.3. *Remarque.* Il y a fort à penser que les groupes  $HL_*(A)$  sont en fait définis sur une catégorie plus large que celle des algèbres associatives unitaires. De même qu'une algèbre associative définit une algèbre de Lie, tout objet de cette catégorie devrait définir une algèbre de Leibniz.