

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE VERSION NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES DE LIE: LES ALGÈBRES DE LEIBNIZ  
**Autor:** Loday, Jean-Louis  
**Kapitel:** 8. Liens avec la topologie algébrique  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60428>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 8. LIENS AVEC LA TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

8.1. *Modèle de James de  $\Omega SBG$*  (d'après J. Lodder [Lo]). Soit  $G$  un groupe discret,  $BG$  son classifiant topologique,  $S^2BG$  la double suspension réduite d'icelui et enfin  $\Omega SBG$  l'espace de lacets de cette suspension. Il est bien connu que l'homologie de ce dernier espace se calcule grâce à l'isomorphisme

$$(8.1.1) \quad H_*(\Omega S^2BG) \cong T(\tilde{H}_{*-1}(G)) ,$$

où  $\tilde{H}_*$  désigne l'homologie réduite ( $\tilde{H}_0 = 0$ ,  $\tilde{H}_i = H_i$  pour  $i > 0$ ). D'autre part l'homologie de Hochschild de l'algèbre de groupe  $k[G]$  se compare à  $\tilde{H}_*(G)$  grâce à l'existence d'une surjection naturelle

$$HH_{*-1}(k[G]) \rightarrow \tilde{H}_{*-1}(G, k) .$$

En prenant le module tensoriel de cette application et en utilisant les isomorphismes (7.4.1) et (8.1.1) on obtient une surjection

$$HL_*(gl(k[G])) \rightarrow H_*(\Omega S^2BG, k) .$$

Dans [Lo], J. Lodder a montré que l'on pouvait relever très explicitement cette application au niveau des complexes de chaînes, à condition de remplacer  $\Omega SBG$  par son modèle de James

$$J(BG) = \coprod_n (BG)^n / \sim .$$

Dans cette interprétation chacun des complexes de chaînes se scinde en une somme de sous-complexes. Le  $i$ -ième sous-complexe se présente comme le complexe total d'un module  $i$ -simplicial et son homologie est précisément la composante  $T^i$ .

Comme sous-produit de ce travail J. Lodder obtient une simplification de la démonstration originale de l'isomorphisme (7.4.1).

8.2. *Homologie des modules simpliciaux-symétriques.* Il existe une catégorie  $\Delta S$  (cf. [F-L]) qui contient à la fois les morphismes de la catégorie simpliciale  $\Delta$  et les éléments des groupes symétriques  $S_{n+1}$  ( $= \text{Aut}_{\Delta S}[n]$ ). Il existe aussi un foncteur  $\Delta^{op} \rightarrow \Delta S$ , qui est injectif sur l'ensemble des morphismes de  $\Delta^{op}$ . Les images des dégénérescences et des faces par ce foncteur sont:

$$\begin{cases} s_j \mapsto \delta_{j+1} & \text{pour } j = 0, \dots, n-1, \\ d_i \mapsto \sigma_i & \text{pour } i = 0, \dots, n-1, \\ d_n \mapsto \sigma_0 c_0^n & \text{où } c_0^n \text{ est le cycle } (0\ 1 \dots n) \in S_{n+1}, \end{cases}$$

cf. [L1], §6.1.11.

A tout foncteur  $M: \Delta S \rightarrow (k - \text{Mod})$  on peut associer un complexe de Leibniz  $(M_*, d)$  en posant

$$(8.2.1) \quad d := \sum_{0 < i < j \leq n} (-1)^{j+1} d_i (c_{i+1}^j - c_i^j) + \sum_{0 < j \leq n} (-1)^j (d_0 c_1^j + d_n c_j^n),$$

où  $d_i$  est la  $i$ -ième face décrite ci-dessus et  $c_i^j$  est le cycle  $(i \ i + 1 \dots j) \in S_{n+1} = \text{Aut}_{\Delta S}[n]$ .

La relation  $d^2 = 0$  est une conséquence des relations, dans  $\Delta S$ , entre les morphismes de  $\Delta$  et les éléments des groupes symétriques (cf. par exemple [L1], §E.6.1.7). On note  $HL_*(M)$  l'homologie du complexe  $(M_*, d)$ .

Voici un exemple de module simplicial-symétrique. Soit  $A$  une algèbre associative unitaire sur  $k$ . Le foncteur  $C(A): \Delta S \rightarrow (k - \text{Mod})$  est défini par  $[n] \mapsto A^{\otimes n+1}$  et

$$\begin{cases} \delta_i(a_0, \dots, a_n) &= (a_0, \dots, a_{i-1}, 1, a_i, \dots, a_n), & \text{pour } i = 0, \dots, n + 1, \\ \sigma_j(a_0, \dots, a_n) &= (a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_n), & \text{pour } j = 0, \dots, n - 1, \\ c_i^{i+1}(a_0, \dots, a_n) &= (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n), & \text{pour } i = 0, \dots, n - 1. \end{cases}$$

On vérifie aisément que le complexe  $(C(A), d)$  est précisément le complexe de Leibniz de  $A$  considérée comme une algèbre de Leibniz (en fait de Lie) pour le crochet usuel  $[a, b] = ab - ba$ .

Un autre exemple est donné par le foncteur  $[n] \mapsto k[S_{n+1}] \otimes A^{\otimes n+1}$  issu de la démonstration de l'isomorphisme (7.4.1).

En fait on n'a pas besoin de toute la catégorie  $\Delta S$  pour définir  $(M_*, d)$ . Il suffit de se limiter à la sous-catégorie  $\Delta^{op} S'$  décrite dans [L1] p. 220.

*Remarque.* Il est naturel de s'interroger sur le rapport entre cette généralisation non-commutative et la théorie quantique. Ces deux généralisations sont orthogonales, mais on peut les réunifier en construisant des théories de type Hochschild et de type Leibniz pour certains modules simpliciaux tressés. On utilise alors la catégorie  $\Delta B$  (cf. [F-L]) faite à partir de  $\Delta$  et des groupes de tresses. En particulier on peut appliquer ces théories au foncteur  $[n] \mapsto A^{\otimes n+1}$ , lorsque l'algèbre  $A$  est munie d'une matrice de Yang-Baxter  $R: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ , satisfaisant certaines propriétés.

8.3. *Homotopie rationnelle non-commutative.* La catégorie homotopique des CW-complexes simplement connexes est, rationnellement, équivalente à la catégorie homotopique des  $\mathbf{Q}$ -algèbres de Lie différentielles graduées réduites. Il est alors naturel de considérer la catégorie homotopique des  $\mathbf{Q}$ -algèbres de *Leibniz* différentielles graduées réduites comme une théorie

de l'homotopie rationnelle «non commutative». Ceci amène immédiatement un certain nombre de questions naturelles: existence de modèles minimaux, analogue non commutatif des cogèbres cocommutatives, analogue des groupes simpliciaux (cf. 10 et 11), etc.

## 9. HOMOLOGIE NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES ASSOCIATIVES

Soit  $A$  une algèbre associative unitaire sur  $k$ . On suppose que  $k$  contient  $\mathbf{Q}$ . Les énoncés et conjectures qui suivent peuvent s'exprimer en utilisant comme coefficients un  $A$ -bimodule  $M$ , mais, pour simplifier, on prendra ici  $M = A$ .

9.1. *Rappel du cas classique* (cf. par exemple [L1]). Le complexe de Hochschild  $(C_*, b)$ , où  $C_n = A \otimes A^{\otimes n}$ , d'homologie  $HH_n(A)$ , possède les propriétés suivantes. Pour tout  $A$  les idempotents eulériens permettent de scinder  $C_n$  en

$$C_n = C_n^{(1)} \oplus C_n^{(2)} \oplus \dots \oplus C_n^{(n)}.$$

(9.1.1) Si  $A$  est commutative,  $C_*^{(1)}$  est un sous-complexe de  $C_*$ , et son homologie n'est autre que l'homologie de Harrison-André-Quillen.

(9.1.2) Si  $A$  est commutative et lisse sur  $k$ , alors  $HH_n^{(1)}(A) = 0$  pour  $n > 1$  et  $HH_1^{(1)}(A) = \Omega_{A/k}^1$ . Pour l'homologie de Hochschild on a alors le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg:

$$HH_*(A) \cong \Lambda_A(H_*^{(1)}(A)) = \Omega_{A/k}^*,$$

où  $\Omega_{A/k}^n$  désigne le module des  $n$ -formes différentielles de Kaehler.

(9.1.3) Le module  $C_n^{(n)}$  est isomorphe à  $A \otimes \Lambda^n A$  ( $M \otimes \Lambda^n A$  dans la version bimodule), et la restriction du bord de Hochschild  $b$  à  $C_n^{(n)}$  aboutit dans  $C_{n-1}^{(n-1)}$ . On a alors un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} C_n^{(n)} & \xrightarrow{b} & C_{n-1}^{(n-1)} \\ \parallel \wr & & \parallel \wr \\ A \otimes \Lambda^n A & \xrightarrow{d} & A \otimes \Lambda^{n-1} A, \end{array}$$