

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE VERSION NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES DE LIE: LES ALGÈBRES DE LEIBNIZ
Autor: Loday, Jean-Louis
Kapitel: 4. Extensions abéliennes d'algèbres de Leibniz et représentations
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60428>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

3. DÉRIVATIONS ET BIDÉRIVATIONS

3.1. *Définitions.* Soit \mathfrak{g} une algèbre de Leibniz. Une *dérivation* $d: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est une application k -linéaire qui vérifie

$$d([x, y]) = [dx, y] + [x, dy], \quad \text{pour tout } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Une *anti-dérivation* $D: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est une application k -linéaire qui vérifie

$$D([x, y]) = [Dx, y] - [Dy, x] \quad \text{pour tout } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Notons que si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie il n'y a pas de différence entre dérivation et anti-dérivation.

Par définition, une *bidérivation* de \mathfrak{g} est la donnée d'une dérivation d et d'une anti-dérivation D qui vérifient en outre

$$(3.1.1) \quad [x, dy] = [x, Dy], \quad \text{pour tout } x, y \in \mathfrak{g}.$$

3.2. *Bidérivation intérieure.* Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ l'application $\text{ad}(x)$ définie par $\text{ad}(x)(y) = -[y, x]$ est une dérivation et l'application $\text{Ad}(x)$ définie par $\text{Ad}(x)(y) = [x, y]$ est une anti-dérivation. De plus, $(\text{ad}(x), \text{Ad}(x))$ est une bidérivation (cf. 1.1) appelée la *bidérivation intérieure* associée à x .

3.3. *L'algèbre de Leibniz Bider (\mathfrak{g}).* L'ensemble des bidérivations de \mathfrak{g} forme un k -module que l'on munit d'un crochet en posant

$$[(d, D), (d', D')] = (dd' - d'd, Dd' - d'D).$$

On peut montrer que, non seulement le membre de droite est bien une bidérivation, mais de plus ce crochet vérifie la relation (L). On a ainsi construit l'algèbre de Leibniz des bidérivations de \mathfrak{g} , que l'on note $\text{Bider}(\mathfrak{g})$. On vérifie aisément que

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{Bider}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto (\text{ad } x, \text{Ad } x)$$

est un morphisme d'algèbres de Leibniz.

4. EXTENSIONS ABÉLIENNES D'ALGÈBRES DE LEIBNIZ ET REPRÉSENTATIONS

Une *algèbre de Leibniz abélienne* est tout simplement une algèbre de Lie abélienne (i.e. $[x, y] = 0$). Par définition une *extension abélienne* d'algèbres de Leibniz est une suite d'algèbres de Leibniz

$$0 \rightarrow M \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

qui est exacte et scindée en tant que suite de k -modules et dans laquelle M est une algèbre de Leibniz abélienne.

Cette suite exacte permet de définir deux actions de \mathfrak{g} sur M :

$$[-, -]: \mathfrak{g} \times M \rightarrow M, [g, m] := [\tilde{g}, m],$$

$$[-, -]: M \times \mathfrak{g} \rightarrow M, [m, g] := [m, \tilde{g}].$$

Dans ces deux formules \tilde{g} est un relèvement de $g \in \mathfrak{g}$ dans \mathfrak{h} et le crochet de droite est celui de \mathfrak{h} . La notation ne prête pas à confusion lorsqu'on sait dans quelle algèbre se trouvent les variables.

La relation (L) du crochet de \mathfrak{h} implique que ces deux actions et le crochet de \mathfrak{g} sont reliés par les relations

$$(MLL) \quad [m, [x, y]] = [[m, x], y] - [[m, y], x]$$

$$(LML) \quad [x, [m, y]] = [[x, m], y] - [[x, y], m]$$

$$(LLM) \quad [x, [y, m]] = [[x, y], m] - [[x, m], y]$$

pour tout $m \in M$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

4.1. *Définition.* Pour toute algèbre de Leibniz \mathfrak{g} , une *représentation* de \mathfrak{g} est la donnée d'un k -module M et de deux applications bilinéaires $[-, -]: \mathfrak{g} \times M \rightarrow M$ et $[-, -]: M \times \mathfrak{g} \rightarrow M$ vérifiant les axiomes (MLL), (LML) et (LLM).

Remarquons que le premier axiome ne fait intervenir que l'action à droite de \mathfrak{g} sur M . Notons aussi que les deux derniers impliquent la relation

$$(ZD) \quad [x, [y, m]] + [x, [m, y]] = 0.$$

4.2. *Représentation adjointe.* Il est clair que si l'on prend $M = \mathfrak{g}$ et que l'on prend pour chacune des actions de \mathfrak{g} le crochet de \mathfrak{g} , on obtient une représentation appelée la *représentation adjointe*.

4.3. *Symétries.* Une représentation M de \mathfrak{g} est dite *symétrique* si

$$[m, x] + [x, m] = 0 \quad \text{pour tout } m \in M, x \in \mathfrak{g}.$$

Par exemple si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie et M une représentation au sens des algèbres de Lie, alors c'est une représentation symétrique au sens des algèbres de Leibniz.

Une représentation M de \mathfrak{g} est dite *antisymétrique* si

$$[x, m] = 0 \quad \text{pour tout } m \in M, x \in \mathfrak{g}.$$

Il est clair que pour toute algèbre de Leibniz \mathfrak{g} le noyau $\mathfrak{g}^{\text{ann}}$ (cf. 2.1) est une représentation de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}_{\text{Lie}}$. C'est une représentation antisymétrique.

Une représentation M de \mathfrak{g} est dite *triviale* si elle est à la fois symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire

$$[x, m] = 0 = [m, x] \quad \text{pour tout } m \in M, x \in \mathfrak{g}.$$

4.4. Coreprésentations. Dans l'analogie avec les algèbres associatives, les représentations sont l'analogue des modules à droite (voir ci-dessous thm 5.2). La notion duale, c'est-à-dire l'analogue des modules à gauche, est celle de coreprésentation.

Par définition une *coreprésentation* N de l'algèbre de Leibniz \mathfrak{g} est la donnée d'un k -module et de deux actions $[-, -]: \mathfrak{g} \times N \rightarrow N$ et $[-, -]: N \times \mathfrak{g} \rightarrow N$ vérifiant les axiomes suivants

$$(MLL)' \quad [[x, y], m] = [x, [y, m]] - [y, [x, m]]$$

$$(LML)' \quad [[y, [m, x]] = [[y, m], x] - [m, [x, y]]$$

$$(LLM)' \quad [[m, x], y] = [m, [x, y]] - [[y, m], x],$$

pour tout $m \in N$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

Notons que les deux dernières relations impliquent la relation

$$(ZD)' \quad [y, [m, x]] + [[m, x], y] = 0.$$

Il est clair que toute représentation d'une algèbre de Lie définit à la fois une représentation et une coreprésentation au sens des algèbres de Leibniz.

Le *produit tensoriel* d'une coreprésentation N et d'une représentation M est le quotient de $N \otimes_k M$ par les relations

$$[n, x] \otimes m \sim n \otimes [x, m] \quad \text{et} \quad [x, n] \otimes m \sim n \otimes [m, x]$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $n \in N$ et $m \in M$.

5. ALGÈBRE ENVELOPPANTE (cf. [L-P]).

La catégorie des représentations d'une algèbre de Leibniz donnée \mathfrak{g} est une catégorie abélienne. Il est naturel d'essayer de la représenter comme une catégorie de modules sur une certaine algèbre, appelée algèbre enveloppante de \mathfrak{g} .