Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE VERSION NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES DE LIE: LES ALGÈBRES DE LEIBNIZ

Autor: Loday, Jean-Louis

Kapitel: 3. DÉRIVATIONS ET BIDÉRIVATIONS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60428

3. Dérivations et bidérivations

3.1. *Définitions.* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz. Une *dérivation* $d: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application k-linéaire qui vérifie

$$d([x, y]) = [dx, y] + [x, dy], \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathfrak{g} .$$

Une *anti-dérivation* $D: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application k-linéaire qui vérifie

$$D([x, y]) = [Dx, y] - [Dy, x] \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathfrak{g} .$$

Notons que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie il n'y a pas de différence entre dérivation et anti-dérivation.

Par définition, une *bidérivation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'une dérivation d et d'une anti-dérivation D qui vérifient en outre

(3.1.1) $$[x, dy] = [x, Dy], \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathfrak{g} .$$

3.2. *Bidérivation intérieure.* Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ l'application $\mathrm{ad}(x)$ définie par $\mathrm{ad}(x)(y) = -[y, x]$ est une dérivation et l'application $\mathrm{Ad}(x)$ définie par $\mathrm{Ad}(x)(y) = [x, y]$ est une anti-dérivation. De plus, $(\mathrm{ad}(x), \mathrm{Ad}(x))$ est une bidérivation (*cf.* 1.1) appelée la *bidérivation intérieure* associée à x.

3.3. *L'algèbre de Leibniz Bider* ($\mathfrak{g}$). L'ensemble des bidérivations de $\mathfrak{g}$ forme un k-module que l'on munit d'un crochet en posant

$$[(d, D), (d', D')] = (dd' - d'd, Dd' - d'D) .$$

On peut montrer que, non seulement le membre de droite est bien une bidérivation, mais de plus ce crochet vérifie la relation (L). On a ainsi construit l'algèbre de Leibniz des bidérivations de $\mathfrak{g}$, que l'on note Bider ($\mathfrak{g}$). On vérifie aisément que

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{Bider}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto (\mathrm{ad}\, x, \mathrm{Ad}\, x)$$

est un morphisme d'algèbres de Leibniz.

4. Extensions abéliennes d'algèbres de Leibniz et représentations

Une *algèbre de Leibniz abélienne* est tout simplement une algèbre de Lie abélienne (i.e. $[x, y] = 0$). Par définition une *extension abélienne* d'algèbres de Leibniz est une suite d'algèbres de Leibniz

$$0 \to M \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to 0$$