

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARKS AND PROBLEMS ON FINITE AND PERIODIC CONTINUED FRACTIONS
Autor: Mendès France, Michel
Kapitel: §6. Quadratic surds
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60426>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROBLEM 5. Let T be a given Möbius map and let $I(T)$ be the associated interval. Let $\zeta \in I(T)$. To compute the Hausdorff dimension of those x for which

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(Tx_n)}{n} = \zeta.$$

Extend this problem to higher dimensions in the spirit of problem 4.

§6. QUADRATIC SURDS

Let x be a real quadratic number. Its continued fraction expansion is ultimately periodic. Let $\pi(x)$ be its period. H. Cohen [3], followed by J. Cusick [4] and Paysant-Leroux [11] studied the action of a Möbius map on the period. They established that

$$\limsup_{\pi(x) \rightarrow \infty} \frac{\pi(Tx)}{\pi(x)} = R(\Delta)$$

where $R(\Delta)$ is an integer. Furthermore

$$A n \ln n \leq R(n) \leq B n \ln n + 1$$

for some constants $A > 0$, $B > 0$. A simple argument then shows that

$$\liminf_{\pi(x) \rightarrow \infty} \frac{\pi(Tx)}{\pi(x)} = \frac{1}{R(\Delta)}.$$

PROBLEM 6. Is it true that for all real quadratic irrational x

$$\sup_n \pi(x^n) = \infty?$$

Define the interval

$$J(\Delta) = \left[\frac{1}{R(\Delta)}, R(\Delta) \right].$$

PROBLEM 7. Let $\zeta \in J(\Delta)$. Prove the existence of a sequence of real quadratic numbers x_n with strictly increasing period such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(Tx_n)}{\pi(x_n)} = \zeta.$$

Extend this result to higher dimensions as in Problem 4.

PROBLEM 8. *Does there exist a sequence x_n of quadratic numbers with strictly increasing period such that for all Möbius map T*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(Tx_n)}{\pi(x_n)} = 1 ?$$

We believe some of our problems are relatively easy to solve. But quite obviously Problem 1, 2 and maybe 6 are deep.

REFERENCES

- [1] BILLINGSLEY, P. *Ergodic Theory and Information*. Wiley 1965.
- [2] CHOQUET, G. Répartition des nombres $k(3/2)^n$; et ensembles associés, (English summary) *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 290 (1980), no. 13, A575-A580; Algorithmes adaptés aux suites $(k\theta^n)$ et aux chaînes associées, (English summary) *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 290 (1980), no. 16, A719-A724; θ -jeux récurrents et application aux suites $(k\theta^n)$; solénoïdes de T^z , (English summary) *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 290 (1980), no. 19, A863-A868; Construction effective de suites $(k(3/2)^n)$. Etude des mesures $(3/2)$ -stables, (English summary) *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 291 (1980), no. 2, A69-A74; Les fermés $(3/2)$ -stables de T ; structure des fermés dénombrables; applications arithmétiques, (English summary) *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 291 (1980), no. 4, A-239-A244; θ -fermés; θ -chaînes et θ -cycles (pour $\theta = 3/2$), (English summary) *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 292 (1981), no. 1, 5-10; θ -fermés et dimension de Hausdorff. Conjectures de travail. Arithmétique des θ -cycles (où $\theta = 3/2$), (English summary) *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 292 (1981), no. 6, 339-344.
- [3] COHEN, H. Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique. *Acta Arith.* 26 (1974), 129-148.
- [4] CUSICK, T. Integer multiples of periodic continued fractions. *Pacific J. Math.* 78 (1978), 47-60.
- [5] DAUDÉ, H. Thèse, Caen 20 Janv. 1993.
- [6] DIXON, J.D. The number of steps in the Euclidean algorithm. *J. of Number Theory* 2 (1970), 414-422. A simple estimate for the number of steps in the Euclidean algorithm. *Amer. Math. Monthly* 78 (1971), 374-376.
- [7] HEILBRONN, H. On the average length of a class of finite continued fractions. In *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis*, Berlin 1968, edited by P. Turàn, 87-96.
- [8] LAMÉ, G. Note sur la limite... *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 19 (1844), 867-870.
- [9] LÉVY, P. Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard. *Compositio Mathem.* 3 (1936), 286-303.
- [10] MENDÈS FRANCE, M. Quelques problèmes relatifs à la théorie des fractions continues limitées. *Séminaire de Théorie des Nombres Bordeaux 1971-72*, 4 bis 01-09; Sur les fractions continues limitées, *Acta Arith.* 23 (1973), 207-215; The depth of a rational number, in *Topics in Number Theory*, Debrecen 1974, *Coll. Mathem. Soc. János Bolyai* 13, 183-194.