

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** COMBINATOIRE ET TYPE TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS  
POLYNOMIALES DE  $\mathbb{C}^2$  DANS  $\mathbb{C}$   
**Autor:** Artal-Bartolo, Enrique  
**Kapitel:** §3. Combinatoire et conjugaison topologique  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60423>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$\psi: \mathbf{C}^2 \setminus L_f^2 \rightarrow \mathbf{C}^2 \setminus L_g^2$  et  $\varphi: \mathbf{C} \setminus L_f^1 \rightarrow \mathbf{C} \setminus L_g^1$  tels que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 \setminus L_f^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{C}^2 \setminus L_g^2 \\ f| \downarrow & & g| \downarrow \\ \mathbf{C} \setminus L_f^1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{C} \setminus L_g^1 \end{array}$$

2.9. THÉORÈME [Fourrier]. Soient  $f, g \in \mathbf{C}[X, Y]$  et soient

$$\tilde{K}_f = K_f \cup \bigcup_{i=1}^r K_f^i \quad \text{et} \quad \tilde{K}_g = K_g \cup \bigcup_{i=1}^s K_g^i$$

les entrelacs totaux de  $f, g$  ( $K_f$  et  $K_g$  sont les entrelacs génériques,  $K_f^i$  et  $K_g^j$  sont les entrelacs spéciaux). Alors,  $f \sim_{\infty} g$  si et seulement si  $r = s$  et il existe un homéomorphisme orienté  $h: S^3 \rightarrow S^3$  tel que  $h(K_f) = K_g$  et  $h(K_f^i) = K_g^{\sigma(i)}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , où  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, \dots, r\}$ .

Ce théorème montre que les classes d'équivalence de  $\sim_{\infty}$  sont aussi déterminées par des invariants combinatoires.

### §3. COMBINATOIRE ET CONJUGAISON TOPOLOGIQUE

Nous allons définir précisément la *combinatoire* des polynômes et étudier son rapport avec les classes d'équivalence de  $\sim$ .

Soit  $f \in \mathbf{C}[X, Y]$  et soit  $S(f) \subset \mathbf{C}$  l'ensemble de (2.2). Alors, la classe d'isomorphie de la fibration  $f|: \mathbf{C}^2 \setminus f^{-1}(S(f)) \rightarrow \mathbf{C} \setminus S(f)$  est bien évidemment un invariant topologique de  $f$ . Les renseignements sur la fibre générique sont entièrement contenus dans l'entrelacs générique, d'après (2.7). Les renseignements sur la monodromie de la fibration autour des valeurs dans  $S_{\infty}(f)$  peuvent être déduits de (2.9); ce résultat contient aussi le plongement en dehors d'un compact des fibres irrégulières à l'infini.

Pour connaître localement la monodromie autour des valeurs dans  $C(f)$ , il faut connaître le type topologique des singularités affines de  $f$ . En effet, soit  $(x_0, y_0) \in \mathbf{C}^2$  un point critique de  $f$  de valeur critique  $t_0$ . On prend  $0 < \varepsilon \ll 1$  et  $0 < \delta \ll \varepsilon$ ; alors, si  $0 < |t - t_0| < \delta$ , l'espace  $f^{-1}(t) \cap \{(x, y) \in \mathbf{C}^2: |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \varepsilon^2\}$  est une fibre de Milnor du germe de singularité de courbe plane  $(f^{-1}(t_0), (x_0, y_0))$ . En plus, une

restriction convenable de  $f$  est un modèle de la fibration de Milnor. Puisque les polynômes sont à singularités isolées le support de la monodromie autour des valeurs dans  $C(f)$  est contenu dans un voisinage des singularités affines de  $f$ .

Nous allons donner les renseignements combinatoires qu'il faut pour coder, d'une part, ces renseignements locaux sur la fibre générique et la monodromie de la fibration de  $f$  et, d'autre part, les renseignements sur les fibres non génériques.

3.1. Soit  $S(f) = \{t_1, \dots, t_p\}$  l'ensemble des valeurs critiques et des valeurs irrégulières à l'infini, et soit  $t_0 \in \mathbf{C} \setminus S(f)$ . Considérons la courbe projective plane  $C_f$  d'équation

$$\tilde{F}(X, Y, Z) := Z \prod_{j=0}^p (F(X, Y, Z) - t_j Z^d) .$$

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, ses composantes irréductibles sont: la droite à l'infini, l'adhérence d'une fibre générique de  $f$  et les adhérences des fibres spéciales de  $f$ .

Soit  $\sigma: Y \rightarrow \mathbf{P}^2$  la résolution plongée minimale des singularités de la courbe  $C_f$ . La courbe  $\sigma^{-1}(C_f)$  est une courbe connexe dans  $Y$  dont toutes les composantes irréductibles sont lisses et tous les points singuliers sont doubles ordinaires. Nous allons définir un graphe pondéré  $G(F, f)$ , qui aura plusieurs classes de sommets.

Le graphe sous-jacent est le graphe dual de  $\sigma^{-1}(C_f)$ . Les sommets de ce graphe correspondent aux composantes irréductibles de la courbe; le nombre d'arêtes qui connectent deux sommets est le nombre de points d'intersection entre les composantes irréductibles de  $\sigma^{-1}(C_f)$  qui leur sont associées. Soit  $V(F, f)$  l'ensemble des sommets; nous considérons une partition de cet ensemble

$$V(F, f) = V_g(F, f) \cup \bigcup_{i=1}^p V_j(F, f) \cup V_a(F, f) \cup V_\infty(F, f) .$$

Nous allons décrire chacun de ces sous-ensembles avec la pondération de chaque sommet:

- (i)  $V_g(F, f)$  est le sommet correspondant à la transformée stricte de  $C_{t_0}$ . La pondération de ce sommet sera  $\{g, \gamma, e\}$ , où  $\gamma$  indique le genre de la composante et  $e$  son nombre d'Euler, i.e., sa self-intersection.

- (ii)  $V_j(F, f)$  est l'ensemble des sommets correspondants à la transformée stricte de  $C_{t_j}$ ,  $j = 1, \dots, p$ . La pondération de ces sommets sera  $\{j, \gamma, e\}$ , où  $\gamma$  indique le genre de la composante et  $e$  son nombre d'Euler.
- (iii)  $V_a(F, f)$  est l'ensemble des sommets correspondants aux composantes exceptionnelles des singularités affines. La pondération de ces sommets sera  $\{a, e\}$ , où  $e$  indique le nombre d'Euler de la composante. Chaque composante connexe du sous-graphe contenant les sommets de  $V_a(F, f)$  est un arbre qui détermine le type topologique d'une singularité affine de  $f$ .
- (iv)  $V_\infty(F, f)$  est l'ensemble des sommets correspondants aux composantes qui sont envoyées dans  $L_\infty$  par  $\sigma$ . La pondération de ces sommets sera  $\{\infty, e\}$ , où  $e$  indique le nombre d'Euler de la composante.

L'homogénéisation  $F$  de  $f$  dépend des coordonnées affines de  $\mathbf{C}^2$ . Une conséquence du *plumbing calculus* de [Neumann 1] (ou bien de la structure des équivalences birationnelles entre surfaces) est la suivante:

**3.2. PROPOSITION.** *Soient  $F_1, F_2$  deux homogénéisations de  $f$ . Alors, quitte à renuméroter  $V_{t_j}(F_k, f)$ ,  $k = 1, 2$ , nous pouvons passer de  $G(F_1, f)$  à  $G(F_2, f)$ , en tant que graphes pondérés à plusieurs types de sommets, par une suite de mouvements des types suivants:*

(i)

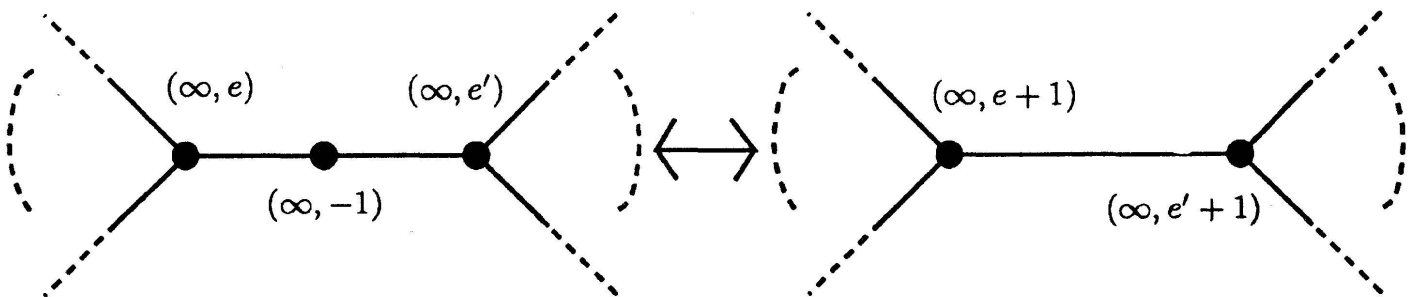


FIGURE 3.1.

(ii)

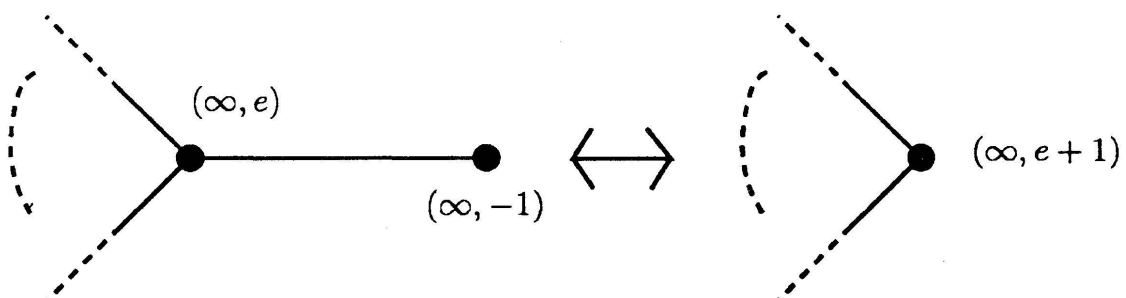


FIGURE 3.2.

3.3. DÉFINITION. *La combinatoire d'une application polynomiale  $f$  est la donnée de la classe d'équivalence du graphe pondéré  $G(F, f)$ , où  $F$  est un homogénéisé de  $f$ , pour la relation d'équivalence engendrée par (i) et (ii).*

3.4. Remarque. Le graphe  $G(F, f)$  contient les renseignements suivants sur la topologie de l'application polynomiale  $f$ :

- (a) Le plongement de la fibre générique de  $f$ .
- (b) Le type topologique des fibres singulières.
- (c) La topologie de  $f$  en dehors d'un compact.
- (d) La base et la fibre de la fibration de  $f$ .
- (e) La monodromie locale autour de chaque valeur critique ou irrégulière à l'infini.

Par contre, dans le résultat suivant nous montrons que la donnée de la classe d'équivalence de  $f$  ne détermine pas la topologie de  $f$ .

3.5. THÉORÈME. *Il existe  $f_1, f_2 \in \mathbf{C}[X, Y]$ , avec des homogénéisés  $F_1, F_2$  tels que:*

- (i)  $G(F_1, f_1) = G(F_2, f_2)$ ;
- (ii)  $f_1 \neq f_2$ .

Nous n'avons pas encore les outils nécessaires pour démontrer le théorème. Ils seront fournis dans la section suivante.

#### §4. UTILISATIONS D'UN COUPLE DE ZARISKI

Les couples de Zariski ont été définis dans [Artal]:

4.1. DÉFINITION. *Un couple de Zariski est une paire de deux courbes  $C_1, C_2$  dans  $\mathbf{P}^2$  telles que*

- (i)  $\deg C_1 = \deg C_2 = d$ .
- (ii) *Les deux courbes possèdent la même combinatoire, c'est-à-dire, il existe un difféomorphisme  $(T(C_1), C_1) \rightarrow (T(C_2), C_2)$ , où  $T(C_i)$  est un voisinage régulier de la courbe  $C_i$  dans  $\mathbf{P}^2$ ,  $i = 1, 2$ .*
- (iii) *Les couples  $(\mathbf{P}^2, C_1)$  et  $(\mathbf{P}^2, C_2)$  ne sont pas homéomorphes.*

Dans [Artal] nous parlons de l'histoire de ces couples, qui commence avec Zariski. Dans cette section nous nous occupons d'un exemple important des