Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COMBINATOIRE ET TYPE TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS POLYNOMIALES DE C^2 DANS C

Autor: Artal-Bartolo, Enrique

Kapitel: §2. COMBINATOIRE ET INFINI

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60423

§2. Combinatoire et infini

Le résultat (1.2) de Thom a été précisé dans [Lê-Há]; les auteurs y donnent la description précise de l'ensemble minimal $S(f)$ pour lequel $f_{|\mathbf{C}\setminus S(f)}$ est une fibration.

Notons $C(f)$ l'ensemble des valeurs critiques de f,

$$C(f) = \left\{ t_0 \in \mathbf{C} \,\middle|\, \exists\,(x_0, y_0) \in f^{-1}(t_0) \text{ tel que } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \right\}.$$

2.1. Définition. *On dit que* $t_0 \in \mathbf{C}$ *est une* valeur régulière à l'infini *s'il existe* $\delta > 0$ *et* $K \subset \mathbf{C}^2$ *compact tels que si*

$$D^2_{t_0,\delta} := \{t \in \mathbf{C} : |t - t_0| < \delta\},$$

alors la restriction $f_| : f^{-1}(D^2_{t_0,\delta}) \cap (\mathbf{C}^2 \setminus K) \to D^2_{t_0,\delta}$ *est une fibration différentiable triviale. Dans le cas contraire, on dit que* t_0 *est une* valeur irrégulière à l'infini. *L'ensemble des valeurs irrégulières à l'infini sera noté* $S_\infty(f)$.

2.2. Théorème. [Lê-Há] $S(f) := C(f) \cup S_\infty(f)$ *est l'ensemble minimal qui vérifie* (1.2).

2.3. Nous rappelons la description de $S_\infty(f)$ de [Lê-Há]. Soit $d := \deg(f)$ et $F(X, Y, Z) \in \mathbf{C}[X, Y, Z]$ l'homogénéisé de degré d de f, $F(X, Y, Z) := Z^d f(X/Z, Y/Z)$.

Géométriquement, nous venons de choisir une compactification $\mathbf{C}^2 \subset \mathbf{P}^2$ où $L_\infty := \{[X : Y : Z] \in \mathbf{P}^2 \mid Z = 0\}$ est la droite à l'infini. La compactification des fibres de f donne une famille $\{C_t\}_{t \in \mathbf{C}}$ de courbes projectives planes, où $F(X, Y, Z) - tZ^d = 0$ est l'équation de C_t, pour $t \in \mathbf{C}$.

L'ensemble $\mathscr{P}_\infty(f) := C_t \cap L_\infty = \{[X : Y : 0] \mid F(X, Y, 0) = 0\}$ est indépendant de la valeur de t, c'est-à-dire, toutes les courbes C_t ont les mêmes points à l'infini.

Soit $P \in \mathscr{P}_\infty(f)$; alors, nous avons une famille de germes en P de singularités de courbes planes $\{(C_t, P) \subset (\mathbf{P}^2, P)\}_{t \in \mathbf{C}}$. En dehors d'un ensemble fini de valeurs de t, cette famille est équisingulière, c'est-à-dire, cette famille possède un type topologique générique. Notons $S_P(f)$ l'ensemble des valeurs de $t \in \mathbf{C}$ pour lesquelles le type topologique de $(C_t, P) \subset (\mathbf{P}^2, P)$ n'est pas générique.

Alors, $S_\infty(f) = \bigcup_{P \in \mathscr{P}_\infty(f)} S_P(f)$.

2.4. *Exemple.* [Broughton] Soit $f := X(XY-1)$; il est facile de voir que $C(f) = \emptyset$. Nous avons $\mathscr{P}_\infty(f) = \{[1:0:0], [0:1:0]\}$. Pour $[0:1:0]$, la famille de singularités est définie par les équations $\{Y - Z^2 - tZ^3 = 0\}_{t \in \mathbf{C}}$; cette famille est équisingulière et $S_{[0:1:0]}(f) = \emptyset$.

Pour $[1:0:0]$, la famille de singularités est définie par les équations $\{X^2 - XZ^2 - tZ^3 = 0\}_{t \in \mathbf{C}}$; pour $t \neq 0$ la singularité est un point cuspidal ordinaire et pour $t = 0$ il s'agit d'un tacnode. Par conséquent, $S_{[1:0:0]}(f) = \{0\}$.

Dans ce cas $S(f) = \{0\}$; nous remarquons que la courbe $f^{-1}(0)$ est lisse mais pas générique.

Dès maintenant et jusqu'à la fin de l'article, nous ne travaillerons qu'avec des polynômes à singularités isolées.

La description de [Lê-Há] nous amène à étudier ce qui se passe à l'infini. Il est facile de voir que pour un polynôme f toutes ses fibres génériques, voire toutes les fibres $f^{-1}(t)$ pour $t \in \mathbf{C} \setminus S_\infty(f)$, ont le même entrelacs à l'infini.

2.5. DÉFINITION. *Soit* $f \in \mathbf{C}[X, Y]$; l'entrelacs générique *de* f, *noté* $K_f \subset S^3$, *est l'entrelacs à l'infini de* $f^{-1}(t)$ *pour* $t \in \mathbf{C} \setminus S_\infty(f)$ *quelconque. Les* entrelacs spéciaux *de* f *sont les entrelacs à l'infini des fibres* $f^{-1}(t)$ *pour* $t \in S_\infty(f)$.

2.6. DÉFINITION. *L'*entrelacs total *de* f *est l'entrelacs à l'infini de la courbe d'équation* $(f(X, Y) - t_0) \prod_{t \in S_\infty(f)} (f(X, Y) - t) = 0$, *avec* $t_0 \in \mathbf{C} \setminus S_\infty(f)$ *quelconque. Cet entrelacs est muni d'une partition en sous-entrelacs: un entrelacs générique et* $\neq S_\infty(f)$ *entrelacs spéciaux.*

Les premiers rapports entre les entrelacs à l'infini et la topologie des polynômes se trouvent dans les résultats suivants:

2.7. THÉORÈME [Neumann2]. *Soient* $f, g \in \mathbf{C}[X, Y]$, $t_0 \in \mathbf{C} \setminus S(f)$ *et* $s_0 \in \mathbf{C} \setminus S(g)$. *Alors, les couples* $(\mathbf{C}^2, f^{-1}(t_0))$ *et* $(\mathbf{C}^2, g^{-1}(s_0)$ *sont homéomorphes si et seulement si les couples* (S^3, K_f) *et* (S^3, K_g) *le sont.*

En particulier, le plongement des fibres génériques peut être exprimé à l'aide d'invariants combinatoires.

2.8. DÉFINITION. *Soient* $f, g \in \mathbf{C}[X, Y]$; *on dit que* f *et* g *sont* topologiquement conjugués à l'infini, *noté* $f \sim_\infty g$, *s'il existe des compacts* $L_f^1, L_g^1 \subset \mathbf{C}$ *et* $L_f^2, L_g^2 \subset \mathbf{C}^2$, *avec des homéomorphismes*

$\psi: \mathbf{C}^2 \backslash L_f^2 \to \mathbf{C}^2 \backslash L_g^2$ *et* $\varphi: \mathbf{C} \backslash L_f^1 \to \mathbf{C} \backslash L_g^1$ *tels que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 \backslash L_f^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{C}^2 \backslash L_g^2 . \\ {\scriptstyle f_|} \downarrow & & {\scriptstyle g_|} \downarrow \\ \mathbf{C} \backslash L_f^1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{C} \backslash L_g^1 . \end{array}$$

2.9. THÉORÈME [Fourrier]. *Soient* $f, g \in \mathbf{C}[X, Y]$ *et soient*

$$\tilde{K}_f = K_f \cup \bigcup_{i=1}^{r} K_f^i \quad \text{et} \quad \tilde{K}_g = K_g \bigcup_{i=1}^{s} K_g^i$$

les entrelacs totaux de f, g *(*K_f *et* K_g *sont les entrelacs génériques,* K_f^i *et* K_g^j *sont les entrelacs spéciaux). Alors,* $f \sim_\infty g$ *si et seulement si* $r = s$ *et il existe un homéomorphisme orienté* $h: S^3 \to S^3$ *tel que* $h(K_f) = K_g$ *et* $h(K_f^i) = K_g^{\sigma(i)}, i = 1, \ldots, r,$ *où* σ *est une permutation de* $\{1, \ldots, r\}$.

Ce théorème montre que les classes d'équivalence de $\sim_\infty$ sont aussi déterminées par des invariants combinatoires.

§3. COMBINATOIRE ET CONJUGAISON TOPOLOGIQUE

Nous allons définir précisément la *combinatoire* des polynômes et étudier son rapport avec les classes d'équivalence de $\sim$.

Soit $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ et soit $S(f) \subset \mathbf{C}$ l'ensemble de (2.2). Alors, la classe d'isomorphie de la fibration $f_|: \mathbf{C}^2 \backslash f^{-1}(S(f)) \to \mathbf{C} \backslash S(f)$ est bien évidemment un invariant topologique de f. Les renseignements sur la fibre générique sont entièrement contenus dans l'entrelacs générique, d'après (2.7). Les renseignements sur la monodromie de la fibration autour des valeurs dans $S_\infty(f)$ peuvent être déduits de (2.9); ce résultat contient aussi le plongement en dehors d'un compact des fibres irrégulières à l'infini.

Pour connaître localement la monodromie autour des valeurs dans $C(f)$, il faut connaître le type topologique des singularités affines de f. En effet, soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{C}^2$ un point critique de f de valeur critique t_0. On prend $0 < \varepsilon \ll 1$ et $0 < \delta \ll \varepsilon$; alors, si $0 < |t - t_0| < \delta$, l'espace $f^{-1}(t) \cap \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \varepsilon^2\}$ est une fibre de Milnor du germe de singularité de courbe plane $(f^{-1}(t_0), (x_0, y_0))$. En plus, une