

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** COMBINATOIRE ET TYPE TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS  
POLYNOMIALES DE  $\mathbb{C}^2$  DANS  $\mathbb{C}$   
**Autor:** Artal-Bartolo, Enrique  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60423>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# COMBINATOIRE ET TYPE TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS POLYNOMIALES DE $\mathbb{C}^2$ DANS $\mathbb{C}$

par Enrique ARTAL-BARTOLO

## § 1. INTRODUCTION

Nous étudions dans cet article des problèmes liés à la classification topologique des applications polynomiales et des courbes affines planes. Nous allons décrire un invariant combinatoire des applications polynomiales  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Nous utilisons ces résultats pour répondre négativement à une conjecture qui se trouve dans [Neumann2] qui affirme que le type topologique des courbes affines planes non singulières est déterminé par leur entrelacs à l'infini. Nous commençons par donner des définitions et préciser les problèmes et les résultats.

Considérons  $\mathbb{C}[X, Y]$  muni de la relation d'équivalence définie comme suit : Soient  $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ ; on note  $f, g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  les applications polynomiales qu'ils définissent. Nous disons que  $f$  et  $g$  sont topologiquement conjugués, noté  $f \sim g$ , s'il existe des homéomorphismes  $\psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  et  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tels que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^2 \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} . \end{array}$$

De la même façon, soient  $C_1, C_2$  deux courbes affines planes, i.e, il existe  $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$  tels que  $C_1 = f^{-1}(0)$  et  $C_2 = g^{-1}(0)$ . Nous disons que les deux courbes sont topologiquement équivalentes s'il existe un homéomorphisme  $\psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  tel que  $\psi(C_1) = C_2$ .

Nous rappelons la définition d'entrelacs à l'infini d'une courbe affine plane, qu'on trouve dans [Neumann-Rudolph]. Pour  $R > 0$ ,

nous notons  $S_R^3 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = R^2\}$ . Soient  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$  et  $C := f^{-1}(0)$ . Pour  $R > 0$  suffisamment grand, la courbe  $C$  (de codimension réelle 2 dans  $\mathbb{C}^2$ ) intersecte transversalement  $S_R^3$ ; par conséquent  $K_R^C := C \cap S_R^3$  est une sous-variété compacte orientée sans bord de codimension 2 dans  $S_R^3$ . C'est-à-dire, il s'agit d'un entrelacs dans  $S_R^3$  qui est une sphère de dimension 3. Par transversalité, le type topologique du couple  $(S_R^3, K_R^C)$  ne dépend pas de  $R$  (s'il est suffisamment grand):

1.1. DÉFINITION. [Neumann-Rudolph]. Soient  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ ,  $C := f^{-1}(0)$  et  $R$  comme ci-dessus. On dit que  $(S^3, K_C)$  est l'entrelacs à l'infini de la courbe  $C$ , s'il a le même type topologique que  $(S_R^3, K_R^C)$ .

Il est démontré dans [Neumann-Rudolph] que deux courbes topologiquement équivalentes possèdent des entrelacs à l'infini topologiquement équivalents; ils démontrent aussi que la *sphère ronde*  $S_R^3$  peut être remplacée par des sphères de dimension 3 suffisamment grandes, *plongées raisonnablement* dans  $\mathbb{C}^2$ , sans changer le type topologique de l'entrelacs obtenu par l'intersection avec la courbe  $C$ .

Les entrelacs à l'infini des courbes affines planes sont des entrelacs toriques itérés, voir [Neumann-Rudolph], et sont codés par un graphe pondéré, voir [Eisenbud-Neumann].

Aux applications polynomiales  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  sont associées des fibrations  $\mathcal{C}^\infty$  localement triviales:

1.2. THÉORÈME [Thom]. Soit  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une application polynomiale. Alors, il existe un ensemble fini  $S \subset \mathbb{C}$  tel que la restriction  $f|: \mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{C} \setminus S$  est une fibration différentiable localement triviale.

Le théorème de Thom est valable en toute dimension. Nous noterons  $S := S(f)$  l'ensemble minimal pour lequel la conclusion du théorème est vraie.

1.3. DÉFINITION. Soit  $c \in \mathbb{C} \setminus S$ ; on dit que  $f^{-1}(c) \subset \mathbb{C}^2$  est une fibre générique de  $f$ . Le type topologique du plongement  $f^{-1}(c) \subset \mathbb{C}^2$  ne dépend pas de  $c \in \mathbb{C} \setminus S$ , à cause du théorème (1.2).

Le problème de la classification topologique des courbes affines planes a été partiellement résolu dans [Neumann2]: Deux courbes *génériques* sont topologiquement équivalentes si elles possèdent des entrelacs à l'infini homéomorphes. Une courbe  $C$  est *générique* s'il existe  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$  tel que  $C = f^{-1}(0)$  est une fibre générique de  $f$ . Les courbes génériques sont lisses,

mais il existe des courbes lisses qui ne sont pas génériques; nous en verrons des exemples. W.D. Neumann conjecture que le résultat reste vrai si l'on suppose seulement que  $C$  est lisse. Nous donnons dans cet article des exemples de courbes lisses ayant le même entrelacs à l'infini qui ne sont pas topologiquement équivalentes.

L'autre problème traité dans cet article est celui de donner des invariants combinatoires pour les classes d'équivalence de la relation  $\sim$  définie ci-dessus. Par des raisons techniques nous allons restreindre l'étude des invariants combinatoires aux polynômes à singularités isolées, i.e., aux  $f \in \mathbf{C}[X, Y]$  tels que il n'y a pas de facteur carré dans la décomposition en facteurs irréductibles de  $f(X, Y) - t, \forall t \in \mathbf{C}$ .

L'idée clé est la suivante: nous essayons de décrire de façon combinatoire l'ensemble minimal  $S(f)$  de (1.2) aussi bien que la fibration  $f|_1$ . Pour ce faire, nous allons associer à chaque polynôme une courbe projective plane  $C_f$  comme suit:

L'ensemble  $S(f)$  minimal est décrit dans [Lê-Há]. Nous en rappelons l'essentiel dans la section §2. Nous considérons  $\mathbf{C}^2$  plongé dans  $\mathbf{P}^2$ . Pour chaque  $s \in S(f)$ , soit  $C_s$  l'adhérence de  $f^{-1}(s)$  dans  $\mathbf{P}^2$ . Alors la courbe  $C_f$  associée à  $f$  est la courbe projective plane dont les composantes irréductibles sont: la droite à l'infini, l'adhérence d'une fibre générique et les courbes  $C_s$  pour  $s \in S(f)$ . La résolution des singularités de  $C_f$  fournit un graphe pondéré qui contient des renseignements sur la fibration associée à  $f$ ; la *combinatoire* de  $f$  est la donnée de ce graphe pondéré (modulo une relation d'équivalence basée sur le *plumbing calculus* de [Neumann1]). Des résultats de [Neumann2] et [Fourrier] incitaient à penser que cette *combinatoire* peut être un invariant complet du type topologique de  $f$ . Nous allons démontrer que ce n'est pas le cas.

Dans la section suivante, nous allons énoncer les résultats de [Neumann2] et [Fourrier] qui ont inspiré ce travail. Nous rappelons aussi le résultat de [Lê-Há] qui précise (1.2).

La section §3 sert à décrire proprement la combinatoire d'un polynôme; nous énoncerons aussi le résultat qui affirme que la combinatoire n'est pas un invariant complet pour le type topologique des applications polynomiales, dont la démonstration sera donnée dans la section §2.

Dans la section §4, nous énonçons des résultats qui se trouvent dans [Artal] sur les couples de Zariski de courbes projectives planes. Cette section finira avec le contre-exemple à la conjecture de Neumann.



## §2. COMBINATOIRE ET INFINI

Le résultat (1.2) de Thom a été précisé dans [Lê-Há]; les auteurs y donnent la description précise de l'ensemble minimal  $S(f)$  pour lequel  $f|_{\mathbf{C} \setminus S(f)}$  est une fibration.

Notons  $C(f)$  l'ensemble des valeurs critiques de  $f$ ,

$$C(f) = \left\{ t_0 \in \mathbf{C} \mid \exists (x_0, y_0) \in f^{-1}(t_0) \text{ tel que } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \right\}.$$

2.1. DÉFINITION. On dit que  $t_0 \in \mathbf{C}$  est une valeur régulière à l'infini s'il existe  $\delta > 0$  et  $K \subset \mathbf{C}^2$  compact tels que si

$$D_{t_0, \delta}^2 := \{t \in \mathbf{C} : |t - t_0| < \delta\},$$

alors la restriction  $f|_{f^{-1}(D_{t_0, \delta}^2) \cap (\mathbf{C}^2 \setminus K)} \rightarrow D_{t_0, \delta}^2$  est une fibration différentiable triviale. Dans le cas contraire, on dit que  $t_0$  est une valeur irrégulière à l'infini. L'ensemble des valeurs irrégulières à l'infini sera noté  $S_\infty(f)$ .

2.2. THÉOREME. [Lê-Há]  $S(f) := C(f) \cup S_\infty(f)$  est l'ensemble minimal qui vérifie (1.2).

2.3. Nous rappelons la description de  $S_\infty(f)$  de [Lê-Há]. Soit  $d := \deg(f)$  et  $F(X, Y, Z) \in \mathbf{C}[X, Y, Z]$  l'homogénéisé de degré  $d$  de  $f$ ,  $F(X, Y, Z) := Z^d f(X/Z, Y/Z)$ .

Géométriquement, nous venons de choisir une compactification  $\mathbf{C}^2 \subset \mathbf{P}^2$  où  $L_\infty := \{[X : Y : Z] \in \mathbf{P}^2 \mid Z = 0\}$  est la droite à l'infini. La compactification des fibres de  $f$  donne une famille  $\{C_t\}_{t \in \mathbf{C}}$  de courbes projectives planes, où  $F(X, Y, Z) - tZ^d = 0$  est l'équation de  $C_t$ , pour  $t \in \mathbf{C}$ .

L'ensemble  $\mathcal{P}_\infty(f) := C_t \cap L_\infty = \{[X : Y : 0] \mid F(X, Y, 0) = 0\}$  est indépendant de la valeur de  $t$ , c'est-à-dire, toutes les courbes  $C_t$  ont les mêmes points à l'infini.

Soit  $P \in \mathcal{P}_\infty(f)$ ; alors, nous avons une famille de germes en  $P$  de singularités de courbes planes  $\{(C_t, P) \subset (\mathbf{P}^2, P)\}_{t \in \mathbf{C}}$ . En dehors d'un ensemble fini de valeurs de  $t$ , cette famille est équisingulière, c'est-à-dire, cette famille possède un type topologique générique. Notons  $S_P(f)$  l'ensemble des valeurs de  $t \in \mathbf{C}$  pour lesquelles le type topologique de  $(C_t, P) \subset (\mathbf{P}^2, P)$  n'est pas générique.

$$\text{Alors, } S_\infty(f) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_\infty(f)} S_P(f).$$

2.4. *Exemple.* [Broughton] Soit  $f := X(XY - 1)$ ; il est facile de voir que  $C(f) = \emptyset$ . Nous avons  $\mathcal{P}_\infty(f) = \{[1:0:0], [0:1:0]\}$ . Pour  $[0:1:0]$ , la famille de singularités est définie par les équations  $\{Y - Z^2 - tZ^3 = 0\}_{t \in \mathbb{C}}$ ; cette famille est équisingulière et  $S_{[0:1:0]}(f) = \emptyset$ .

Pour  $[1:0:0]$ , la famille de singularités est définie par les équations  $\{X^2 - XZ^2 - tZ^3 = 0\}_{t \in \mathbb{C}}$ ; pour  $t \neq 0$  la singularité est un point cuspidal ordinaire et pour  $t = 0$  il s'agit d'un tacnode. Par conséquent,  $S_{[1:0:0]}(f) = \{0\}$ .

Dans ce cas  $S(f) = \{0\}$ ; nous remarquons que la courbe  $f^{-1}(0)$  est lisse mais pas générique.

Dès maintenant et jusqu'à la fin de l'article, nous ne travaillerons qu'avec des polynômes à singularités isolées.

La description de [Lê-Há] nous amène à étudier ce qui se passe à l'infini. Il est facile de voir que pour un polynôme  $f$  toutes ses fibres génériques, voire toutes les fibres  $f^{-1}(t)$  pour  $t \in \mathbb{C} \setminus S_\infty(f)$ , ont le même entrelacs à l'infini.

2.5. DÉFINITION. Soit  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ ; l'entrelacs générique de  $f$ , noté  $K_f \subset S^3$ , est l'entrelacs à l'infini de  $f^{-1}(t)$  pour  $t \in \mathbb{C} \setminus S_\infty(f)$  quelconque. Les entrelacs spéciaux de  $f$  sont les entrelacs à l'infini des fibres  $f^{-1}(t)$  pour  $t \in S_\infty(f)$ .

2.6. DÉFINITION. L'entrelacs total de  $f$  est l'entrelacs à l'infini de la courbe d'équation  $(f(X, Y) - t_0) \prod_{t \in S_\infty(f)} (f(X, Y) - t) = 0$ , avec

$t_0 \in \mathbb{C} \setminus S_\infty(f)$  quelconque. Cet entrelacs est muni d'une partition en sous-entrelacs: un entrelacs générique et  $\neq S_\infty(f)$  entrelacs spéciaux.

Les premiers rapports entre les entrelacs à l'infini et la topologie des polynômes se trouvent dans les résultats suivants:

2.7. THÉORÈME [Neumann2]. Soient  $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ ,  $t_0 \in \mathbb{C} \setminus S(f)$  et  $s_0 \in \mathbb{C} \setminus S(g)$ . Alors, les couples  $(\mathbb{C}^2, f^{-1}(t_0))$  et  $(\mathbb{C}^2, g^{-1}(s_0))$  sont homéomorphes si et seulement si les couples  $(S^3, K_f)$  et  $(S^3, K_g)$  le sont.

En particulier, le plongement des fibres génériques peut être exprimé à l'aide d'invariants combinatoires.

2.8. DÉFINITION. Soient  $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ ; on dit que  $f$  et  $g$  sont topologiquement conjugués à l'infini, noté  $f \sim_\infty g$ , s'il existe des compacts  $L_f^1, L_g^1 \subset \mathbb{C}$  et  $L_f^2, L_g^2 \subset \mathbb{C}^2$ , avec des homéomorphismes

$\psi: \mathbf{C}^2 \setminus L_f^2 \rightarrow \mathbf{C}^2 \setminus L_g^2$  et  $\varphi: \mathbf{C} \setminus L_f^1 \rightarrow \mathbf{C} \setminus L_g^1$  tels que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 \setminus L_f^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{C}^2 \setminus L_g^2 \\ f| \downarrow & & g| \downarrow \\ \mathbf{C} \setminus L_f^1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{C} \setminus L_g^1 \end{array}$$

2.9. THÉORÈME [Fourrier]. Soient  $f, g \in \mathbf{C}[X, Y]$  et soient

$$\tilde{K}_f = K_f \cup \bigcup_{i=1}^r K_f^i \quad \text{et} \quad \tilde{K}_g = K_g \cup \bigcup_{i=1}^s K_g^i$$

les entrelacs totaux de  $f, g$  ( $K_f$  et  $K_g$  sont les entrelacs génériques,  $K_f^i$  et  $K_g^j$  sont les entrelacs spéciaux). Alors,  $f \sim_{\infty} g$  si et seulement si  $r = s$  et il existe un homéomorphisme orienté  $h: S^3 \rightarrow S^3$  tel que  $h(K_f) = K_g$  et  $h(K_f^i) = K_g^{\sigma(i)}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , où  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, \dots, r\}$ .

Ce théorème montre que les classes d'équivalence de  $\sim_{\infty}$  sont aussi déterminées par des invariants combinatoires.

### §3. COMBINATOIRE ET CONJUGAISON TOPOLOGIQUE

Nous allons définir précisément la *combinatoire* des polynômes et étudier son rapport avec les classes d'équivalence de  $\sim$ .

Soit  $f \in \mathbf{C}[X, Y]$  et soit  $S(f) \subset \mathbf{C}$  l'ensemble de (2.2). Alors, la classe d'isomorphie de la fibration  $f|: \mathbf{C}^2 \setminus f^{-1}(S(f)) \rightarrow \mathbf{C} \setminus S(f)$  est bien évidemment un invariant topologique de  $f$ . Les renseignements sur la fibre générique sont entièrement contenus dans l'entrelacs générique, d'après (2.7). Les renseignements sur la monodromie de la fibration autour des valeurs dans  $S_{\infty}(f)$  peuvent être déduits de (2.9); ce résultat contient aussi le plongement en dehors d'un compact des fibres irrégulières à l'infini.

Pour connaître localement la monodromie autour des valeurs dans  $C(f)$ , il faut connaître le type topologique des singularités affines de  $f$ . En effet, soit  $(x_0, y_0) \in \mathbf{C}^2$  un point critique de  $f$  de valeur critique  $t_0$ . On prend  $0 < \varepsilon \ll 1$  et  $0 < \delta \ll \varepsilon$ ; alors, si  $0 < |t - t_0| < \delta$ , l'espace  $f^{-1}(t) \cap \{(x, y) \in \mathbf{C}^2: |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \varepsilon^2\}$  est une fibre de Milnor du germe de singularité de courbe plane  $(f^{-1}(t_0), (x_0, y_0))$ . En plus, une

restriction convenable de  $f$  est un modèle de la fibration de Milnor. Puisque les polynômes sont à singularités isolées le support de la monodromie autour des valeurs dans  $C(f)$  est contenu dans un voisinage des singularités affines de  $f$ .

Nous allons donner les renseignements combinatoires qu'il faut pour coder, d'une part, ces renseignements locaux sur la fibre générique et la monodromie de la fibration de  $f$  et, d'autre part, les renseignements sur les fibres non génériques.

3.1. Soit  $S(f) = \{t_1, \dots, t_p\}$  l'ensemble des valeurs critiques et des valeurs irrégulières à l'infini, et soit  $t_0 \in \mathbf{C} \setminus S(f)$ . Considérons la courbe projective plane  $C_f$  d'équation

$$\tilde{F}(X, Y, Z) := Z \prod_{j=0}^p (F(X, Y, Z) - t_j Z^d) .$$

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, ses composantes irréductibles sont: la droite à l'infini, l'adhérence d'une fibre générique de  $f$  et les adhérences des fibres spéciales de  $f$ .

Soit  $\sigma: Y \rightarrow \mathbf{P}^2$  la résolution plongée minimale des singularités de la courbe  $C_f$ . La courbe  $\sigma^{-1}(C_f)$  est une courbe connexe dans  $Y$  dont toutes les composantes irréductibles sont lisses et tous les points singuliers sont doubles ordinaires. Nous allons définir un graphe pondéré  $G(F, f)$ , qui aura plusieurs classes de sommets.

Le graphe sous-jacent est le graphe dual de  $\sigma^{-1}(C_f)$ . Les sommets de ce graphe correspondent aux composantes irréductibles de la courbe; le nombre d'arêtes qui connectent deux sommets est le nombre de points d'intersection entre les composantes irréductibles de  $\sigma^{-1}(C_f)$  qui leur sont associées. Soit  $V(F, f)$  l'ensemble des sommets; nous considérons une partition de cet ensemble

$$V(F, f) = V_g(F, f) \cup \bigcup_{i=1}^p V_j(F, f) \cup V_a(F, f) \cup V_\infty(F, f) .$$

Nous allons décrire chacun de ces sous-ensembles avec la pondération de chaque sommet:

- (i)  $V_g(F, f)$  est le sommet correspondant à la transformée stricte de  $C_{t_0}$ . La pondération de ce sommet sera  $\{g, \gamma, e\}$ , où  $\gamma$  indique le genre de la composante et  $e$  son nombre d'Euler, i.e., sa self-intersection.

- (ii)  $V_j(F, f)$  est l'ensemble des sommets correspondants à la transformée stricte de  $C_{t_j}$ ,  $j = 1, \dots, p$ . La pondération de ces sommets sera  $\{j, \gamma, e\}$ , où  $\gamma$  indique le genre de la composante et  $e$  son nombre d'Euler.
- (iii)  $V_a(F, f)$  est l'ensemble des sommets correspondants aux composantes exceptionnelles des singularités affines. La pondération de ces sommets sera  $\{a, e\}$ , où  $e$  indique le nombre d'Euler de la composante. Chaque composante connexe du sous-graphe contenant les sommets de  $V_a(F, f)$  est un arbre qui détermine le type topologique d'une singularité affine de  $f$ .
- (iv)  $V_\infty(F, f)$  est l'ensemble des sommets correspondants aux composantes qui sont envoyées dans  $L_\infty$  par  $\sigma$ . La pondération de ces sommets sera  $\{\infty, e\}$ , où  $e$  indique le nombre d'Euler de la composante.

L'homogénéisation  $F$  de  $f$  dépend des coordonnées affines de  $\mathbf{C}^2$ . Une conséquence du *plumbing calculus* de [Neumann 1] (ou bien de la structure des équivalences birationnelles entre surfaces) est la suivante:

3.2. PROPOSITION. Soient  $F_1, F_2$  deux homogénéisations de  $f$ . Alors, quitte à renuméroter  $V_{t_j}(F_k, f)$ ,  $k = 1, 2$ , nous pouvons passer de  $G(F_1, f)$  à  $G(F_2, f)$ , en tant que graphes pondérés à plusieurs types de sommets, par une suite de mouvements des types suivants:

(i)

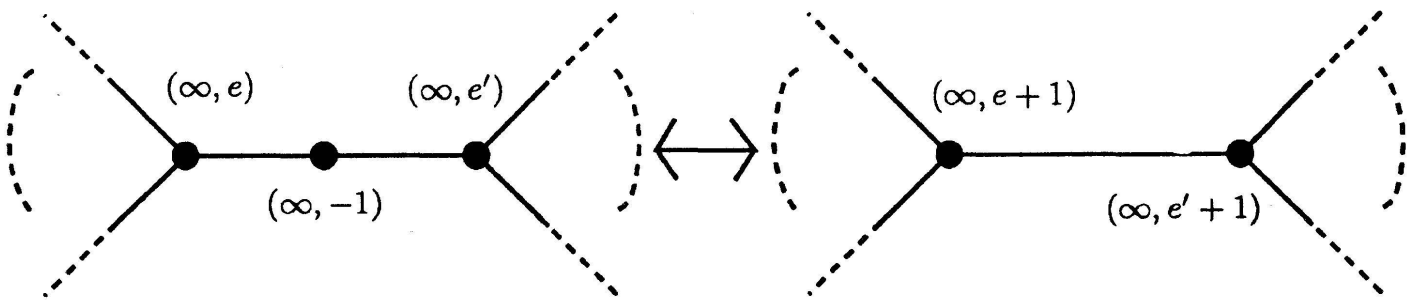


FIGURE 3.1.

(ii)

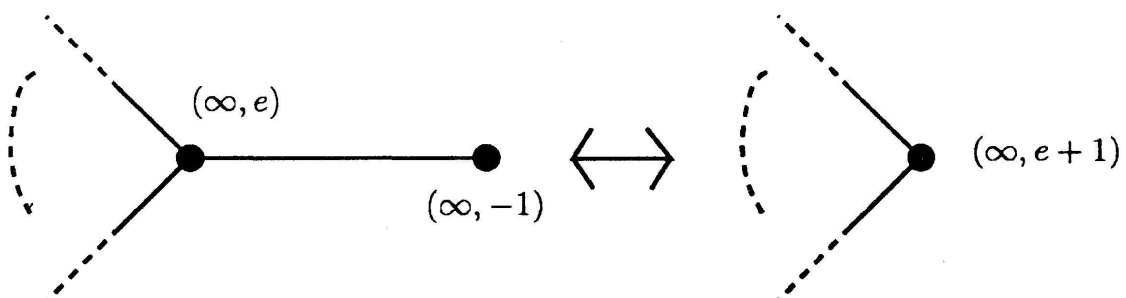


FIGURE 3.2.

3.3. DÉFINITION. *La combinatoire d'une application polynomiale  $f$  est la donnée de la classe d'équivalence du graphe pondéré  $G(F, f)$ , où  $F$  est un homogénéisé de  $f$ , pour la relation d'équivalence engendrée par (i) et (ii).*

3.4. Remarque. Le graphe  $G(F, f)$  contient les renseignements suivants sur la topologie de l'application polynomiale  $f$ :

- (a) Le plongement de la fibre générique de  $f$ .
- (b) Le type topologique des fibres singulières.
- (c) La topologie de  $f$  en dehors d'un compact.
- (d) La base et la fibre de la fibration de  $f$ .
- (e) La monodromie locale autour de chaque valeur critique ou irrégulière à l'infini.

Par contre, dans le résultat suivant nous montrons que la donnée de la classe d'équivalence de  $f$  ne détermine pas la topologie de  $f$ .

3.5. THÉORÈME. *Il existe  $f_1, f_2 \in \mathbf{C}[X, Y]$ , avec des homogénéisés  $F_1, F_2$  tels que:*

- (i)  $G(F_1, f_1) = G(F_2, f_2)$ ;
- (ii)  $f_1 \neq f_2$ .

Nous n'avons pas encore les outils nécessaires pour démontrer le théorème. Ils seront fournis dans la section suivante.

#### §4. UTILISATIONS D'UN COUPLE DE ZARISKI

Les couples de Zariski ont été définis dans [Artal]:

4.1. DÉFINITION. *Un couple de Zariski est une paire de deux courbes  $C_1, C_2$  dans  $\mathbf{P}^2$  telles que*

- (i)  $\deg C_1 = \deg C_2 = d$ .
- (ii) *Les deux courbes possèdent la même combinatoire, c'est-à-dire, il existe un difféomorphisme  $(T(C_1), C_1) \rightarrow (T(C_2), C_2)$ , où  $T(C_i)$  est un voisinage régulier de la courbe  $C_i$  dans  $\mathbf{P}^2$ ,  $i = 1, 2$ .*
- (iii) *Les couples  $(\mathbf{P}^2, C_1)$  et  $(\mathbf{P}^2, C_2)$  ne sont pas homéomorphes.*

Dans [Artal] nous parlons de l'histoire de ces couples, qui commence avec Zariski. Dans cette section nous nous occupons d'un exemple important des

couples de Zariski. L'exemple en question, qui se trouve dans [Artal], est une paire de courbes dont on sait que leur plongement dans  $\mathbf{P}^2$  est différent grâce au  $b$ -invariant de chaque courbe. Rappelons une interprétation du  $b$ -invariant d'une courbe irréductible  $Q$  de degré  $d$ :

4.1.2. Soit  $L$  une droite quelconque de  $\mathbf{P}^2$ . On sait que  $H_1(\mathbf{P}^2 \setminus (Q \cup L); \mathbf{Z})$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}$ . Considérons  $X_{Q,L}^d \rightarrow \mathbf{P}^2 \setminus (Q \cup L)$  le revêtement non ramifié cyclique à  $d$  feuilles. Alors le rang de  $H_1(X_{Q,L}^d; \mathbf{Z})$  est égal à  $2b(C) + 1$ .

Voici le couple de Zariski que nous allons utiliser:

4.3. DÉFINITION. Soit  $Q$  une courbe projective plane irréductible de degré six; nous dirons que  $Q$  est de type  $*$  si  $Q$  possède un seul point singulier  $P_1$  et si ce point est de type  $\mathbf{A}_{17}$ .

Nous rappelons qu'une singularité de courbe plane est de type  $\mathbf{A}_{17}$  s'il existe des coordonnées analytiques locales  $x, y$  centrées au point singulier telles que l'équation de la singularité est  $x^2 - y^{18} = 0$ , i.e., la singularité possède deux branches lisses avec nombre d'intersection égal à 9.

Soit  $\mathcal{F}$  l'espace de toutes les courbes de type  $*$ . Nous utiliserons le résultat suivant de [Artal].

4.4. THÉORÈME. Il y a deux composantes connexes  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  dans  $\mathcal{F}$ . Si deux courbes appartiennent à des composantes connexes différentes, elles sont plongées différemment dans  $\mathbf{P}^2$ . Les deux composantes connexes sont décrites comme suit:

- (i)  $\mathcal{F}_1$  est l'ensemble des courbes  $Q_1 \in \mathcal{F}$  telles que si  $R_1$  est la conique qui a un contact maximal avec  $Q_1$  au point singulier  $P \in Q_1$ , alors, le nombre d'intersection de  $Q_1$  et  $R_1$  en  $P$  est égal à 12.

Il existe un ouvert de Zariski  $\mathcal{U}_1$  de

$$\{(X(XY - Z^2) - Y^3 - aZ(XY - Z^2))^2 + b(XY - Z^2)^3 \mid a, b \in \mathbf{C}\}$$

tel que la famille  $\mathcal{F}_1$  est l'ensemble de courbes projectives planes de degré six dont l'équation est linéairement équivalente à un élément de  $\mathcal{U}_1$ .

Pour les éléments  $C_1 \in \mathcal{F}_1$  nous avons  $b(C_1) = 2$ .

- (ii)  $\mathcal{F}_2$  est l'ensemble des courbes  $Q_2 \in \mathcal{F}$  telles que si  $R_2$  est la conique qui a un contact maximal avec  $Q_2$  au point singulier  $P \in Q_2$ , alors, le nombre d'intersection de  $Q_2$  et  $R_2$  en  $P$  est égal à 10.

Un exemple d'élément de  $\mathcal{F}_2$  est

$$(X(XY - Z^2) - Y^2Z)^2 - 4Y(XY - Z^2)(Z(XY - Z^2) - Y^3) - (Z(XY - Z^2) - Y^3)^2.$$

Pour les éléments de  $C_2 \in \mathcal{F}_2$  nous avons  $b(C_2) = 0$ .

*Démonstration de (3.5).* Fixons une courbe  $Q$  de type  $*$  et soit  $P_1$  son point singulier. Soit  $L$  une droite générique passant par  $P_1$ , c'est-à-dire,  $L$  n'est pas tangente à  $Q$  en  $P_1$  et  $\#(L \cap Q) = 5$ ,  $L \cap Q = \{P_1, \dots, P_5\}$ .

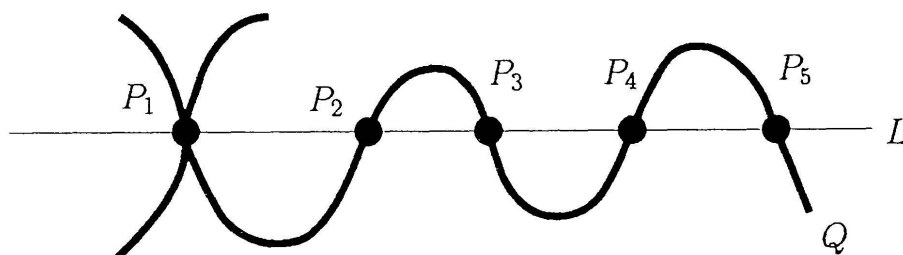


FIGURE 4.1.

Choisissons des coordonnées telles que  $L$  soit la droite d'équation  $Z = 0$ ,  $P_1$  soit  $[1:0:0]$  et que la droite tangente à  $Q$  en  $P_1$  soit  $Y = 0$ . Considérons  $f(X, Y) := F(X, Y, 1) \in \mathbb{C}[X, Y]$ , où  $F(X, Y, Z) = 0$  est l'équation de  $Q$  dans ce système de coordonnées.

4.5. LEMME.  $S_\infty(f) = \{0\}$  et si  $t \neq 0$ , la courbe  $Q_t$  d'équation  $F(X, Y, Z) = tZ^d$  possède un seul point singulier en  $P_1$ . Ce point est de type  $A_5$  et la tangente au point singulier n'est pas la droite  $L$ .

*Preuve.* En prenant  $X = 1$ , nous avons des coordonnées affines centrées en  $P_1$ . L'équation de  $Q_t$  est:

$$0 = g_t(Y, Z) := F(1, Y, Z) - tZ^6 = Y^2 + \text{termes de degré} \geq 3.$$

Nous éclatons le point  $P_1$ . Nous notons  $E_1$  la composante exceptionnelle; nous gardons la même notation pour les transformées strictes. La courbe  $Q$ , et avec elle les courbes  $Q_t$ , passent par un point  $\hat{P}_1$  qui est dans  $E_1$  mais pas dans  $L$ .

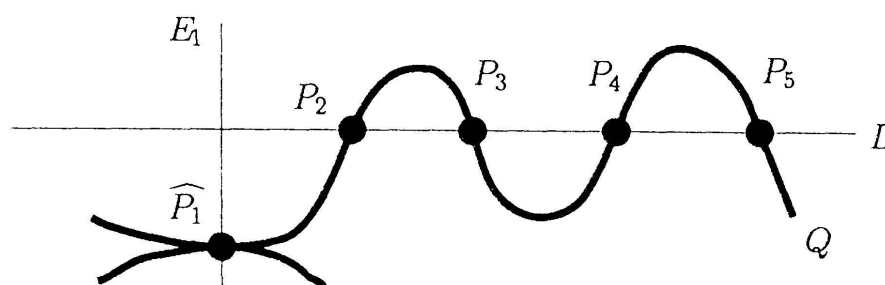


FIGURE 4.2.



On choisit des coordonnées affines centrées en  $\hat{P}_1$  telles que l'équation de l'éclatement s'écrive comme suit:

$$(y_1, z_1) \mapsto (y_1 z_1, z_1) .$$

L'équation de  $E_1$  est  $Z_1 = 0$ . Nous savons que  $Q$  possède un point singulier en  $P_1$  de type  $A_{15}$ , non tangent à  $E_1$ .

L'équation de  $Q$  en  $P_1$  est:

$$0 = \hat{g}(Y_1, Z_1) := \frac{F(1, Y_1 Z_1, Z_1)}{Z_1^2} = (Y_1 + a Z_1)^2 + \text{termes de degré} \geq 3 ,$$

où  $a \in \mathbf{C}$ . Par conséquent, l'équation de  $Q_t$  est  $\hat{g}(Y_1, Z_1) - t Z_1^4 = 0$ .

Nous éclatons maintenant le point  $\hat{P}_1$ . Les courbes  $Q$  et  $Q_t$  vont toutes passer par un point  $\hat{P}'_1$  de la nouvelle composante exceptionnelle  $E_2$  (qui ne sera pas dans  $E_1$ ). On peut choisir des coordonnées centrées en  $\hat{P}'_1$  telles que l'équation de l'éclatement soit:

$$(y_2, z_2) \mapsto ((y_2 - a) z_2, z_2) .$$

D'après les équations précédentes et puisque  $Q$  possède en  $\hat{P}'_1$  un point singulier de type  $A_{13}$ , l'équation de  $Q$  est de la forme  $0 = Y_2^2 + \text{termes de degré} \geq 3$ , et, par conséquent, celle de  $Q_t$  est de la forme:

$$0 = Y_2^2 - t Z_2^2 + \text{termes de degré} \geq 3 ,$$

ce qui implique que  $Q_t$  possède un point double ordinaire en  $\hat{P}'_1$  si  $t \neq 0$ . Par conséquent,  $(Q_t, P_1)$  est de type  $A_5$ .  $\square$

4.6. CONSÉQUENCE. Tous les polynômes  $f$  ainsi obtenus, possèdent la même fibre générique, car, d'après le lemme précédent ils ont le même entrelacs générique à l'infini, et l'on applique (2.7). En utilisant (2.9) nous voyons aussi que tous ces polynômes sont topologiquement conjugués à l'infini.

4.7. PROPOSITION. Soient  $Q_i$  des courbes projectives planes d'équation  $F_i(X, Y, Z) = 0, i = 1, 2$ , où

$$\begin{aligned} F_1(X, Y, Z) &= (X(XY - Z^2) - Y^3)^2 - (XY - Z^2)^3 \\ F_2(X, Y, Z) &= (X(XY - (Y + Z)^2) - Y^2(Y + Z))^2 \\ &\quad - 4Y(XY - (Y + Z)^2)(Y(XY - (Y + Z)^2) - Y^3) \\ &\quad - (X(XY - (Y + Z)^2) - Y^3)^2 \end{aligned}$$

Alors,  $Q_1$  et  $Q_2$  sont de type  $*$  et les couples  $(\mathbf{P}^2, Q_1)$  et  $(\mathbf{P}^2, Q_2)$  ne sont pas homéomorphes. En particulier, les polynômes  $f_1, f_2$  obtenus comme ci-dessus ne sont pas topologiquement conjugués.

*Preuve.* La première assertion est une conséquence de (4.4). En effet, il est facile de voir que  $Q_1 \in \mathcal{F}_1$  (prendre  $a = 0, b = -1$ ) et  $Q_2 \in \mathcal{F}_2$  (nous avons remplacé  $Z$  par  $Y + Z$  dans l'exemple donné dans (4.4)).

Il est facile de voir que la droite  $L$  d'équation  $Z = 0$  est générique pour les deux cas. Soient  $X_{Q_1, L}^6$  et  $X_{Q_2, L}^6$  les revêtements cycliques d'ordre 6 de  $\mathbf{P}^2 \setminus (Q_1 \cup L)$  et  $\mathbf{P}^2 \setminus (Q_2 \cup L)$ , respectivement. Les rangs des groupes abéliens  $H_1(X_{Q_1, L}^6, \mathbf{Z})$  et  $H_1(X_{Q_2, L}^6, \mathbf{Z})$  sont égaux à 3 et 1, respectivement, d'après (4.4) et (4.2). Par conséquent, les couples  $(\mathbf{P}^2, Q_i \cup L)$ ,  $i = 1, 2$ , ne sont pas homéomorphes.

Si l'on construit les polynômes  $f_i(X, Y) := F_i(X, Y, 1)$ ,  $i = 1, 2$ , nous avons vu que les couples  $(\mathbf{C}^2, f_i^{-1}(0))$ ,  $i = 1, 2$ , ne sont pas homéomorphes. Puisque 0 est la seule valeur singulière à l'infini, d'après (4.5), nous en déduisons que les polynômes ne sont pas conjugués.  $\square$

Il était concevable à priori que les plongements distincts de  $f_i^{-1}(0)$ ,  $i = 1, 2$ , soient provoqués par les singularités des autres fibres de chaque polynôme. Un calcul nous donne le lemme suivant:

4.8. LEMME.  $\# C(f_i) = 7$  et pour chaque  $t \in C(f_i)$ , la fibre  $f_i^{-1}(t)$  a exactement un point double ordinaire.

*Fin de la démonstration de (3.5).* Considérons les courbes  $C_{f_i}$  données par les polynômes  $\tilde{F}_i(X, Y, Z)$ ,  $i = 1, 2$ . Le lemme précédent et le lemme (4.5) nous montrent qu'il y a une bijection entre les singularités de  $C_{f_1}$  et  $C_{f_2}$  qui respecte le type topologique. Le nombre de composantes irréductibles et la distribution de singularités dans les composantes sont les mêmes pour les deux courbes.

Nous en déduisons que  $G(F_1, f_1) = G(F_2, f_2)$  et (4.7) dit que  $f_1 \neq f_2$ .  $\square$

Nous finissons en utilisant ces polynômes pour donner des contre-exemples à la conjecture de Neumann:

4.9. THÉOREME. Les courbes  $f_i^{-1}(0)$ ,  $i = 1, 2$ , ont les mêmes entrelacs à l'infini, mais elles ne sont pas topologiquement équivalentes.

*Démonstration.* Nous venons de voir dans la preuve de (4.7) que les deux courbes ne sont pas topologiquement équivalentes.

D'après la définition des courbes de type \*, et du choix générique de la droite à l'infini, nous en déduisons que les deux courbes ont le même entrelacs à l'infini. En effet, il suffit de prendre comme *grande sphère* le bord d'un

voisinage tubulaire de la droite à l'infini  $Z = 0$  dans  $\mathbf{P}^2$ . Dans les deux cas, les courbes rencontrent la droite en quatre points lisses et au point singulier de type  $A_{17}$ ; les droites tangentes aux points d'intersection sont toujours différentes de la droite à l'infini. En utilisant les techniques de [Eisenbud-Neumann], nous voyons que les deux entrelacs à l'infini sont topologiquement équivalents.  $\square$

### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Artal] ARTAL, E. Les couples de Zariski. *Journal of Algebraic Geometry* (à paraître).
- [Broughton] BROUGHTON, S.A. On the Topology of Polynomial Hyper-surfaces. Dans *Proc. of Symp. in Pure Math.*, vol. 40 (Arcata Singularities Conference, 167-178, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1983).
- [Eisenbud-Neumann] EISENBUD, D. and W.D. NEUMANN. Three-Dimensional link theory and invariants of plane curve singularities. *Annals of Mathematic Studies* 101, Princeton Univ. Press, Princeton N.Y., 1985.
- [Fourrier] FOURRIER, L. Thèse, Université de Toulouse, 1993.
- [Lê-Ha] LÊ DUNG TRÁNG et HA HUY VUI. Sur les polynômes complexes. *Acta-Math. Vietnam.* 9 (1984), 21-32.
- [Neumann 1] NEUMANN, W.D. A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves. *Trans. Amer. Math. Soc.* 268 (1981), 299-344.
- [Neumann 2] ——— Complex algebraic plane curves via their links at infinity. *Invent. Math.* 98 (1989), 445-489.
- [Neumann-Rudolph] NEUMANN, W.D. and L. RUDOLPH. Unfoldings in knot theory, *Math. Ann.* 278 (1987), 409-439.
- [Thom] THOM, R. Ensembles et morphismes stratifiés. *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), 240-284.

(Reçu le 2 décembre 1992)

Enrique Artal-Bartolo

Departamento de Geometría y Topología

Universidad Complutense

E-28040 Madrid

Spain

Adresse électronique: artal@mat.ucm.es