

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	39 (1993)
Heft:	3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN
Autor:	Kaplan, Pierre / LEONARD, Philip A.
Kapitel:	§4. Exemples numériques
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-60422

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 1. On sait que

$$(3.8) \quad \text{Card}(\text{Ker } \theta) = \begin{cases} 3, & \text{si (1.1) n'a pas de solution impaire,} \\ 1, & \text{si (1.1) a des solutions impaires.} \end{cases}$$

Ce résultat était déjà connu de Gauss ([2], § 256, VI); d'autres démonstrations se trouvent dans [8], § 151 et [5], page 172.

Le Théorème 1 est une conséquence immédiate de (3.7) et (3.8).

Remarque. Les résultats analogues aux Théorèmes 2 et 3 quand $D \equiv 1 \pmod{8}$ seront exposés dans un article ultérieur.

§ 4. EXEMPLES NUMÉRIQUES

a) THÉORÈME 2.

Nous donnons les valeurs de N_- , N_-^* et N^* pour tous les $D \equiv 5 \pmod{8}$ de 5 à 109, et pour 141 et 165 que nous étudierons en b).

D	N_-	N_-^*	N^*
5	4	1	1
13	10	3	1
21	14	4	2
29	16	5	1
37	24	7	3
45	20	6	2
53	22	7	1
61	36	11	3
69	34	10	4
77	26	8	2
85	46	14	4
93	38	12	2
101	36	11	3
109	58	17	7
141	58	18	4
165	60	18	6

b) THÉORÈMES 1 ET 3.

Nous noterons $H^+(\Delta)$ le nombre des classes d'idéaux au sens strict de l'anneau O_Δ .

Pour chacun des deux exemples le tableau correspondant donne successivement pour chaque classe C de C_{4D}^+ un idéal négativement réduit, le nombre l_- des idéaux négativement réduits de C , un idéal négativement réduit de $\theta(C)$ et enfin les nombres l_-^* et l^* des idéaux négativement réduits et réduits de $\theta(C)$.

b1) $D = 141$. C'est le plus petit $D \equiv 5 \pmod{8}$ tel que $h^+(D) > 1$ et tel que (1.1) n'a pas de solution impaire. On a $h^+(141) = 2$ et $h^+(4 \times 141) = 6$.

C	l_-	$\theta(C)$	l_-^*	l^*
$[1, 12 + \sqrt{141}]$	2	$\left[1, \frac{13 + \sqrt{141}}{2} \right]$	4	2
$[4, 13 + \sqrt{141}]$	6			
$[7, 13 + \sqrt{141}]$	6			
$[5, 14 + \sqrt{141}]$	8	$\left[5, \frac{19 + \sqrt{141}}{2} \right]$	14	2
$[11, 14 + \sqrt{141}]$	8			
$[20, 29 + \sqrt{141}]$	28			

Le Théorème 3 affirme que $2 + 6 + 6 = 3 \times 4 + 2$ et $8 + 8 + 28 = 3 \times 14 + 2$, ce qui est vrai.

Le Théorème 1 affirme que $2 \neq 3 \times 4 + 2$, $6 \neq 3 \times 4 + 2$, $8 \neq 3 \times 14 + 2$, $28 \neq 3 \times 14 + 2$, ce qui est vrai.

b2) $D = 165$. C'est le plus petit $D \equiv 5 \pmod{8}$ tel que $h^+(D) \geq 4$ et tel que (1.1) a des solutions impaires. On a $h^+(165) = h^+(4 \times 165) = 4$.

C	l_-	$\theta(C)$	l_-^*	l^*
$[1, 13 + \sqrt{165}]$	4	$\left[1, \frac{13 + \sqrt{165}}{2} \right]$	1	1
$[3, 15 + \sqrt{165}]$	8	$\left[3, \frac{15 + \sqrt{165}}{2} \right]$	2	2
$[7, 16 + \sqrt{165}]$	14	$\left[7, \frac{23 + \sqrt{165}}{2} \right]$	4	2
$[11, 22 + \sqrt{165}]$	34	$\left[11, \frac{33 + \sqrt{165}}{2} \right]$	11	1

Les Théorèmes 1 et 3 affirment que $4 = 3 \times 1 + 1$, $8 = 3 \times 2 + 2$, $14 = 3 \times 4 + 2$ et $34 = 3 \times 11 + 1$, ce qui est exact.

D'autres exemples du Théorème 1 se trouvent dans [9].

Les auteurs remercient le rapporteur pour ses indications judicieuses qui leur ont permis de parfaire leur texte.

RÉFÉRENCES

- [1] EISENSTEIN, G. *Aufgaben. J. reine angew. Math.* 27 (1844), 86-87. (Werke I. pp. 111-112, Chelsea Publishing Company, New York 1975.)
- [2] GAUSS, C. F. *Arithmetische Untersuchungen (Disquisitiones Arithmeticae)*. Chelsea Publishing Company, New York 1965.
- [3] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 5e Edition (1989).
- [4] ISHII, N., P. KAPLAN and K. S. WILLIAMS. On Eisenstein's problem. *Acta Arithmetica* 54 (1990), 323-345.
- [5] KAPLAN, P. *Cours d'Arithmétique*. Université de Nancy I, U.E.R. de Sciences Mathématiques, 1973.
- [6] KAPLAN, P. and K. S. WILLIAMS. Pell's equations $X^2 - mY^2 = -1, -4$ and continued fractions. *J. Number Theory* 23 (1986), 169-182.
- [7] KAPLAN, P. and K. S. WILLIAMS. The distance between ideals in the orders of a real quadratic field. *L'Enseignement Mathématique* 36 (1990), 321-358.
- [8] LEJEUNE DIRICHLET, P. G and R. DEDEKIND. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Chelsea Publishing Company, New York (1968).
- [9] MIMURA, Y. On odd solutions of the equation $X^2 - DY^2 = 4$. *Proceedings of the symposium on analytic number theory and related topics*, Gakushuin University, Tokyo (1992), 110-118.
- [10] PERRON, O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Teubner (1977).
- [11] TAKAGI, T. *Théorie des nombres élémentaires*. Kyoritsu, Tokyo (1971), (en japonais).

(Reçu le 10 novembre 1992)

Pierre Kaplan

Université de Nancy I
Département de Mathématiques
B.P. 239
54506 Vandœuvre Les Nancy Cedex
France

Philip A. Leonard

Arizona State University
Tempe AZ 85281-1804
USA