Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN

Autor: Kaplan, Pierre / LEONARD, Philip A.

Kapitel: §4. Exemples numériques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60422

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 1. On sait que

$$\text{(3.8)} \qquad \operatorname{Card}(\operatorname{Ker}\theta) = \begin{cases} 3, & \text{si} \quad (1.1) \text{ n'a pas de solution impaire,} \\ 1, & \text{si} \quad (1.1) \text{ a des solutions impaires.} \end{cases}$$

Ce résultat était déjà connu de Gauss ([2], §256, VI); d'autres démonstrations se trouvent dans [8], §151 et [5], page 172.

Le Théorème 1 est une conséquence immédiate de (3.7) et (3.8).

Remarque. Les résultats analogues aux Théorèmes 2 et 3 quand $D \equiv 1 \pmod 8$ seront exposés dans un article ultérieur.

§4. Exemples numériques

a) Théorème 2.

Nous donnons les valeurs de N_-, N_-^* et N^* pour tous les $D \equiv 5 \pmod 8$ de 5 à 109, et pour 141 et 165 que nous étudierons en b).

D	N_-	N_-^*	N^*
5	4	1	1
13	10	3	1
21	14	4	2
29	16	5	1
37	24	7	3
45	20	6	2
53	22	7	1
61	36	11	3
69	34	10	4
77	26	8	2
85	46	14	4
93	38	12	2
101	36	11	3
109	58	17	7
141	58	18	4
165	60	18	6

b) THÉORÈMES 1 ET 3.

Nous noterons $H^+(\Delta)$ le nombre des classes d'idéaux au sens strict de l'anneau O_Δ.

Pour chacun des deux exemples le tableau correspondant donne successivement pour chaque classe C de C_{4D}^+ un idéal négativement réduit, le nombre l_- des idéaux négativement réduits de C, un idéal négativement réduit de $\theta(C)$ et enfin les nombres l_-^* et l^* des idéaux négativement réduits et réduits de $\theta(C)$.

b1) $D = 141$. C'est le plus petit $D \equiv 5 \pmod 8$ tel que $h^+(D) > 1$ et tel que (1.1) n'a pas de solution impaire. On a $h^+(141) = 2$ et $h^+(4 \times 141) = 6$.

C	l_-	$\theta(C)$	l_-^*	l^*
$[1, 12 + \sqrt{141}]$	2			
$[4, 13 + \sqrt{141}]$	6	$\left[1, \dfrac{13 + \sqrt{141}}{2}\right]$	4	2
$[7, 13 + \sqrt{141}]$	6			
$[5, 14 + \sqrt{141}]$	8			
$[11, 14 + \sqrt{141}]$	8	$\left[5, \dfrac{19 + \sqrt{141}}{2}\right]$	14	2
$[20, 29 + \sqrt{141}]$	28			

Le Théorème 3 affirme que $2 + 6 + 6 = 3 \times 4 + 2$ et $8 + 8 + 28 = 3 \times 14 + 2$, ce qui est vrai.

Le Théorème 1 affirme que $2 \neq 3 \times 4 + 2$, $6 \neq 3 \times 4 + 2$, $8 \neq 3 \times 14 + 2$, $28 \neq 3 \times 14 + 2$, ce qui est vrai.

b2) $D = 165$. C'est le plus petit $D \equiv 5 \pmod 8$ tel que $h^+(D) \geqslant 4$ et tel que (1.1) a des solutions impaires. On a $h^+(165) = h^+(4 \times 165) = 4$.

C	l_-	$\theta(C)$	l_-^*	l^*
$[1, 13 + \sqrt{165}]$	4	$\left[1, \dfrac{13 + \sqrt{165}}{2}\right]$	1	1
$[3, 15 + \sqrt{165}]$	8	$\left[3, \dfrac{15 + \sqrt{165}}{2}\right]$	2	2
$[7, 16 + \sqrt{165}]$	14	$\left[7, \dfrac{23 + \sqrt{165}}{2}\right]$	4	2
$[11, 22 + \sqrt{165}]$	34	$\left[11, \dfrac{33 + \sqrt{165}}{2}\right]$	11	1

Les Théorèmes 1 et 3 affirment que $4 = 3 \times 1 + 1$, $8 = 3 \times 2 + 2$, $14 = 3 \times 4 + 2$ et $34 = 3 \times 11 + 1$, ce qui est exact.

D'autres exemples du Théorème 1 se trouvent dans [9].

Les auteurs remercient le rapporteur pour ses indications judicieuses qui leur ont permis de parfaire leur texte.

RÉFÉRENCES

[1] EISENSTEIN, G. Aufgaben. *J. reine angew. Math. 27* (1844), 86-87. (Werke I. pp. 111-112, Chelsea Publishing Company, New York 1975.)

[2] GAUSS, C. F. *Arithmetische Untersuchungen (Disquisitiones Aritmeticae).* Chelsea Publishing Company, New York 1965.

[3] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford University Press, 5e Edition (1989).

[4] ISHII, N., P. KAPLAN and K. S. WILLIAMS. On Eisenstein's problem. *Acta Arithmetica 54* (1990), 323-345.

[5] KAPLAN, P. *Cours d'Arithmétique.* Université de Nancy I, U.E.R. de Sciences Mathématiques, 1973.

[6] KAPLAN, P. and K. S. WILLIAMS. Pell's equations $X^2 - mY^2 = -1, -4$ and continued fractions. *J. Number Theory 23* (1986), 169-182.

[7] KAPLAN, P. and K. S. WILLIAMS. The distance between ideals in the orders of a real quadratic field. *L'Enseignement Mathématique 36* (1990), 321-358.

[8] LEJEUNE DIRICHLET, P. G and R. DEDEKIND. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Chelsea Publishing Company, New York (1968).

[9] MIMURA, Y. On odd solutions of the equation $X^2 - DY^2 = 4$. *Proceedings of the symposium on analytic number theory and related topics,* Gakushuin University, Tokyo (1992), 110-118.

[10 PERRON, O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Teubner (1977).

[11] TAKAGI, T. *Théorie des nombres élémentaires.* Kyoritsu, Tokyo (1971), (en japonais).

(Reçu le 10 novembre 1992)

Pierre Kaplan

Université de Nancy I
Département de Mathématiques
B.P. 239
54506 Vandœuvre Les Nancy Cedex
France

Philip A. Leonard

Arizona State University
Tempe AZ 85281-1804
USA