Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN

Autor: Kaplan, Pierre / LEONARD, Philip A.

Kapitel: §3. L'HOMOMORPHISME ET L'APPLICATION

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60422

§3. L'HOMOMORPHISME θ ET L'APPLICATION ψ

Soit C_Δ le groupe des classes d'idéaux au sens usuel de l'anneau O_Δ. L'homomorphisme θ de C_{Df^2} sur C_D défini et étudié dans [7], §3 est en fait un homomorphisme des groupes des classes d'idéaux au sens strict, de $C^+_{Df^2}$ sur C^+_D. On vérifie que le Theorem 1 et le Corollary 4 de [7] soient vrais si l'on remplace classe par classe au sens strict et équivalence par équivalence au sens strict: pour adapter la démonstration du Théorème 1 il suffit de ne considérer que des substitutions linéaires de déterminant $+1$ (pages 333-334), et pour celle du Corollary 4 il suffit de remarquer que, avec les notations de [7], page 335,

$$N\left(\frac{\sqrt{D'}-b}{2a}\right).N\left(\frac{-\frac{b}{f}+\sqrt{D}}{2c}\right)>0\,.$$

A partir de maintenant nous considérons le cas où $D \equiv 1 \pmod 4$ et $f = 2$.

LEMME 4. *Un idéal primitif de* O_{4D} *s'écrit* $I = [a, b + \sqrt{D}]$ *avec* $b \equiv 1 \pmod 2$, *et soit* $a \equiv 1 \pmod 2$, *soit* $a \equiv 0 \pmod 4$. *Si* C *est la classe au sens strict de* I, *la classe* $\theta(C)$ *contient l'idéal* $\theta(I)$ *où* $\theta(I)$ *est défini par*

$$\theta(I)=\begin{cases}\left[a,\dfrac{b+\sqrt{D}}{2}\right], & si\ a\equiv 1 \pmod 2\,,\\[2ex] \left[\dfrac{a}{4},\dfrac{b+\sqrt{D}}{2}\right], & si\ a\equiv 0 \pmod 4\,,\end{cases}\tag{3.1}$$

Démonstration. Soit $I = [a, b' + \sqrt{D}]$ un idéal primitif de O_{4D}. On a donc $D = b'^2 - ac$. Si b' est pair alors a est impair, donc $I = [a, b' + a + \sqrt{D}]$, donc on peut toujours supposer $I = [a, b + \sqrt{D}]$ avec b impair. Alors $ac \equiv 0 \pmod 4$ et, comme $(a, 2b, c) = 1$, on voit que: soit $a \equiv 1 \pmod 2$, $c \equiv 0 \pmod 4$, soit $a \equiv 0 \pmod 4$, $c \equiv 1 \pmod 2$.

Le fait que $\theta(I) \in \theta(C)$ est une conséquence immédiate de [7] Theorem 1 et Corollary 4.

Nous supposerons toujours $b \equiv 1 \pmod 2$ dans l'écriture $I = [a, b + \sqrt{D}]$ d'un idéal primitif de O_{4D} et nous poserons $I = a[1, \varphi]$ avec $\varphi = \dfrac{b+\sqrt{D}]}{a}$ où φ est défini modulo 1.

Soit I associé à φ un idéal de O_Δ ($\Delta = D$ ou $4D$). Nous noterons I' et φ' l'idéal et le nombre associés obtenus à partir de I et φ par une étape de réduction négative, c'est-à-dire $\varphi' = \dfrac{1}{[\varphi+1]-\varphi}$. Nous avons

PROPOSITION 6. *Soit* $I = a[1, \varphi]$ *un idéal primitif négativement réduit de* O_{4D}. *Si* $a \equiv 1 \pmod 2$ *et si* $\theta(I)$ *n'est pas négativement réduit alors* $(\theta(I))'$ *est négativement réduit. Si* $a \equiv 0 \pmod 4$, $\theta(I)$ *est négativement réduit.*

Démonstration. D'après le Lemme 2 on a $\varphi + [-\bar{\varphi}] > 0$. Si $a \equiv 1 \pmod 2$, $\theta(I) = a\left[1, \dfrac{\varphi}{2}\right]$ est négativement réduit si, et seulement si, $\dfrac{\varphi}{2} + \left[\dfrac{-\bar{\varphi}}{2}\right] > 0$. Si $\theta(I)$ n'est pas négativement réduit on a simultanément

$$\varphi + [-\bar{\varphi}] > 0\,, \qquad \varphi + 2\left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] < 0 \tag{3.2}$$

d'où, comme $[-\bar{\varphi}] > 2\left[\dfrac{-\bar{\varphi}}{2}\right]$, on voit que $[-\bar{\varphi}] = 2\left[\dfrac{-\bar{\varphi}}{2}\right] + 1$ et

$$\frac{1}{2} < \frac{-\bar{\varphi}}{2} - \left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] < 1\,. \tag{3.3}$$

Des inégalités (3.2) on déduit aussi $-\left[\dfrac{-\bar{\varphi}}{2}\right] - \dfrac{1}{2} < \dfrac{\varphi}{2} < -\left[\dfrac{-\bar{\varphi}}{2}\right]$ d'où

$$\left[\frac{\varphi}{2} + 1\right] = -\left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] \text{ avec } 0 < \left[\frac{\varphi}{2} + 1\right] - \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{2}\,. \tag{3.4}$$

Pour vérifier que $\theta(I)'$ est négativement réduit il suffit de voir que

$$\frac{1}{\left[\frac{\varphi}{2} + 1\right] - \frac{\varphi}{2}} + \left[\frac{-1}{-\left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] - \frac{\bar{\varphi}}{2}}\right] > 0$$

ce qui résulte de (3.3) et (3.4).

Si $a \equiv 0 \pmod 4$, $\theta(I) = \dfrac{a}{4}[1, 2\varphi]$ est négativement réduit, car $2\varphi + [-2\bar{\varphi}] \geqslant 2\varphi + 2[-\bar{\varphi}] > 0$. Ceci achève de prouver la proposition 6.

Soit maintenant E l'ensemble des idéaux négativement réduits de O_{4D}. Nous considérons la partition suivante de E en trois sous-ensembles E_1, E_2, E_3. Soit $I = a[1, \varphi]$ un idéal primitif de O_{4D}, négativement réduit. Alors

$$\begin{array}{lllll} I \in E_1 & \text{si} & a \equiv 1 \pmod 2 & \text{et} & \theta(I) \text{ est négativement réduit,} \\ I \in E_2 & \text{si} & a \equiv 1 \pmod 2 & \text{et} & \theta(I) \text{ n'est pas négativement réduit,} \\ I \in E_3 & \text{si} & a \equiv 0 \pmod 4 . & & \end{array}$$

Soit E^* l'ensemble des idéaux négativement réduits de O_D. Nous définissons une application ψ de E dans E^* de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \psi(I) &= \theta(I), \quad \text{si } I \in E_1, \quad \text{ou } I \in E_3, \\ \psi(I) &= (\theta(I))', \quad \text{si } I \in E_2, \end{aligned}$$

de sorte que $\psi(I) \in \theta(C)$, où C désigne la classe de I.

Les propositions suivantes ne sont vraies que si $D \equiv 5 \pmod 8$. Ce qui distingue ce cas est que, si $D \equiv 5 \pmod 8$, pour tout idéal $J = \left[a, \dfrac{b + \sqrt{D}}{2}\right]$ on a $a \equiv c \equiv 1 \pmod 2$.

PROPOSITION 7. *Si* $D \equiv 5 \pmod 8$ *la restriction de* ψ *à* E_3 *est surjective. L'image réciproque d'un idéal* $J \in E^*$ *a deux éléments si* J *est réduit, un seul si* J *n'est que négativement réduit.*

Démonstration. Soit $J = a[1, \omega]$ un élément de E^*. On peut supposer $0 < \bar{\omega} < 1 < \omega$. Les idéaux de $\psi^{-1}(J)$ appartenant à E_3 sont à chercher parmi les idéaux $4a\left[1, \dfrac{\omega + k}{2}\right]$ où $k \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire parmi les idéaux $I_1 = 4a\left[1, \dfrac{\omega}{2}\right]$ et $I_2 = 4a\left[1, \dfrac{\omega + 1}{2}\right]$. Les idéaux I_1 et I_2 sont primitifs et I_2 est négativement réduit alors que I_1 l'est si, et seulement si, $\omega > 2$ ce qui signifie que J est réduit.

PROPOSITION 8. *Si* $D \equiv 5 \pmod 8$ *les restrictions de* ψ *à* E_1 *et à* E_2 *sont des bijections de* E_i $(i = 1, 2)$ *sur* E^*.

Démonstration. Soit ψ_1 la restriction de ψ à E_1, et soit $J = a[1, \omega] \in E^*$. On a $\omega + [-\bar{\omega}] > 0$, donc $I = a[1, 2\omega]$ est négativement réduit et, comme $a \equiv 1 \pmod 2$, on a $\theta(I) = J$ et $I \in E_1$, ce qui montre que ψ_1 est surjective. Soit $I_1 = a_1[1, \varphi_1]$ un idéal de E_1 tel que $\psi_1(I_1) = J$; alors

$\theta(I_1) = a_1 \left[1, \dfrac{\varphi_1}{2}\right] = J$, d'où $a_1 = a$ et $\varphi_1 \equiv 2\omega \pmod 2$, ce qui montre que $I_1 = I$ et que ψ_1 est injective.

Considérons maintenant la restriction ψ_2 de ψ à E_2. Soit J un idéal de E^* et ω le nombre négativement réduit associé à J. Les idéaux J_- donnant J par une étape de réduction négative sont définis par les nombres $\dfrac{-1}{\omega + n}$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Comme $\dfrac{-2}{\omega + n}$ est un nombre de discriminant $4D$, les idéaux $\psi_2^{-1}(J)$ sont, parmi les idéaux définis par les nombres $\dfrac{-2}{\omega + n}$ $(n \in \mathbf{Z})$, ceux qui sont négativement réduits sans que J_- le soit, ce qui se traduit par

$$\frac{-1}{\omega + n} + \left[\frac{1}{\bar{\omega} + n}\right] < 0\,, \qquad \frac{-2}{\omega + n} + \left[\frac{2}{\bar{\omega} + n}\right] > 0$$

d'après le lemme 2, c'est-à-dire

$$2\left[\frac{1}{\bar{\omega} + n}\right] < \frac{2}{\omega + n} < \left[\frac{2}{\bar{\omega} + n}\right]. \tag{3.5}$$

Tenant compte de ce que $0 < \bar{\omega} < 1 < \omega$, on vérifie que $n = 1$ est la seule valeur de n qui satisfait (3.5), ce qui montre que ψ_2 est bijective et achève de prouver la proposition 8.

Des propositions 7 et 8 résulte immédiatement le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Soit* $D \equiv 5 \pmod 8$ *un discriminant* > 0. *Soit* N_- *le nombre des idéaux primitifs négativement réduits de* O_{4D}, *et soient* N_-^* *et* N^* *respectivement le nombre des idéaux primitifs négativement réduits et réduits de* O_D. *Alors*

$$N_- = 3N_-^* + N^*\,. \tag{3.6}$$

L'application ψ étant compatible avec l'homomorphisme θ le résultat plus précis suivant est vrai.

THÉORÈME 3. *Soit* $D \equiv 5 \pmod 8$ *un discriminant* > 0. *Soit* C^* *une classe d'idéaux au sens strict de* O_D *et* $\theta^{-1}(C^*)$ *son image inverse par* θ. *Soit* L_- *le nombre des idéaux primitifs négativement réduits de* $\theta^{-1}(C^*)$ *et soient* L_-^* *et* L^* *le nombre des idéaux primitifs respectivement négativement réduits et réduits de* C^*. *Alors:*

$$L_- = 3L_-^* + L^*\,. \tag{3.7}$$

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 1. On sait que

$$\text{(3.8)} \quad \mathrm{Card}(\mathrm{Ker}\,\theta) = \begin{cases} 3, & \text{si} \quad (1.1) \text{ n'a pas de solution impaire,} \\ 1, & \text{si} \quad (1.1) \text{ a des solutions impaires.} \end{cases}$$

Ce résultat était déjà connu de Gauss ([2], §256, VI); d'autres démonstrations se trouvent dans [8], §151 et [5], page 172.

Le Théorème 1 est une conséquence immédiate de (3.7) et (3.8).

Remarque. Les résultats analogues aux Théorèmes 2 et 3 quand $D \equiv 1 \pmod 8$ seront exposés dans un article ultérieur.

§4. Exemples numériques

a) Théorème 2.

Nous donnons les valeurs de N_-, N_-^* et N^* pour tous les $D \equiv 5 \pmod 8$ de 5 à 109, et pour 141 et 165 que nous étudierons en b).

D	N_-	N_-^*	N^*
5	4	1	1
13	10	3	1
21	14	4	2
29	16	5	1
37	24	7	3
45	20	6	2
53	22	7	1
61	36	11	3
69	34	10	4
77	26	8	2
85	46	14	4
93	38	12	2
101	36	11	3
109	58	17	7
141	58	18	4
165	60	18	6