

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN  
**Autor:** Kaplan, Pierre / LEONARD, Philip A.  
**Kapitel:** §3. L'HOMOMORPHISME ET L'APPLICATION  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60422>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

§3. L'HOMOMORPHISME  $\theta$  ET L'APPLICATION  $\psi$ 

Soit  $C_\Delta$  le groupe des classes d'idéaux au sens usuel de l'anneau  $O_\Delta$ . L'homomorphisme  $\theta$  de  $C_{Df^2}$  sur  $C_D$  défini et étudié dans [7], §3 est en fait un homomorphisme des groupes des classes d'idéaux au sens strict, de  $C_{Df^2}^+$  sur  $C_D^+$ . On vérifie que le Theorem 1 et le Corollary 4 de [7] soient vrais si l'on remplace classe par classe au sens strict et équivalence par équivalence au sens strict: pour adapter la démonstration du Théorème 1 il suffit de ne considérer que des substitutions linéaires de déterminant  $+1$  (pages 333-334), et pour celle du Corollary 4 il suffit de remarquer que, avec les notations de [7], page 335,

$$N\left(\frac{\sqrt{D'} - b}{2a}\right) \cdot N\left(\frac{-\frac{b}{f} + \sqrt{D}}{2c}\right) > 0.$$

A partir de maintenant nous considérons le cas où  $D \equiv 1 \pmod{4}$  et  $f = 2$ .

LEMME 4. *Un idéal primitif de  $O_{4D}$  s'écrit  $I = [a, b + \sqrt{D}]$  avec  $b \equiv 1 \pmod{2}$ , et soit  $a \equiv 1 \pmod{2}$ , soit  $a \equiv 0 \pmod{4}$ . Si  $C$  est la classe au sens strict de  $I$ , la classe  $\theta(C)$  contient l'idéal  $\theta(I)$  où  $\theta(I)$  est défini par*

$$(3.1) \quad \theta(I) = \begin{cases} \left[ a, \frac{b + \sqrt{D}}{2} \right], & \text{si } a \equiv 1 \pmod{2}, \\ \left[ \frac{a}{4}, \frac{b + \sqrt{D}}{2} \right], & \text{si } a \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $I = [a, b' + \sqrt{D}]$  un idéal primitif de  $O_{4D}$ . On a donc  $D = b'^2 - ac$ . Si  $b'$  est pair alors  $a$  est impair, donc  $I = [a, b' + a + \sqrt{D}]$ , donc on peut toujours supposer  $I = [a, b + \sqrt{D}]$  avec  $b$  impair. Alors  $ac \equiv 0 \pmod{4}$  et, comme  $(a, 2b, c) = 1$ , on voit que: soit  $a \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $c \equiv 0 \pmod{4}$ , soit  $a \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $c \equiv 1 \pmod{2}$ .

Le fait que  $\theta(I) \in \theta(C)$  est une conséquence immédiate de [7] Theorem 1 et Corollary 4.

Nous supposons toujours  $b \equiv 1 \pmod{2}$  dans l'écriture  $I = [a, b + \sqrt{D}]$  d'un idéal primitif de  $O_{4D}$  et nous poserons  $I = a[1, \varphi]$  avec  $\varphi = \frac{b + \sqrt{D}}{a}$

où  $\varphi$  est défini modulo 1.

Soit  $I$  associé à  $\varphi$  un idéal de  $O_\Delta$  ( $\Delta = D$  ou  $4D$ ). Nous noterons  $I'$  et  $\varphi'$  l'idéal et le nombre associés obtenus à partir de  $I$  et  $\varphi$  par une étape de réduction négative, c'est-à-dire  $\varphi' = \frac{1}{[\varphi + 1] - \varphi}$ . Nous avons

**PROPOSITION 6.** *Soit  $I = a[1, \varphi]$  un idéal primitif négativement réduit de  $O_{4D}$ . Si  $a \equiv 1 \pmod{2}$  et si  $\theta(I)$  n'est pas négativement réduit alors  $(\theta(I))'$  est négativement réduit. Si  $a \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $\theta(I)$  est négativement réduit.*

*Démonstration.* D'après le Lemme 2 on a  $\varphi + [-\bar{\varphi}] > 0$ . Si  $a \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $\theta(I) = a \left[1, \frac{\varphi}{2}\right]$  est négativement réduit si, et seulement si,  $\frac{\varphi}{2} + \left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] > 0$ . Si  $\theta(I)$  n'est pas négativement réduit on a simultanément

$$(3.2) \quad \varphi + [-\bar{\varphi}] > 0, \quad \varphi + 2 \left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] < 0$$

d'où, comme  $[-\bar{\varphi}] > 2 \left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right]$ , on voit que  $[-\bar{\varphi}] = 2 \left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] + 1$  et

$$(3.3) \quad \frac{1}{2} < \frac{-\bar{\varphi}}{2} - \left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] < 1.$$

Des inégalités (3.2) on déduit aussi  $-\left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] - \frac{1}{2} < \frac{\varphi}{2} < -\left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right]$  d'où

$$(3.4) \quad \left[\frac{\varphi}{2} + 1\right] = -\left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] \text{ avec } 0 < \left[\frac{\varphi}{2} + 1\right] - \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{2}.$$

Pour vérifier que  $\theta(I)'$  est négativement réduit il suffit de voir que

$$\frac{1}{\left[\frac{\varphi}{2} + 1\right] - \frac{\varphi}{2}} + \left[\frac{-1}{-\left[\frac{-\bar{\varphi}}{2}\right] - \frac{\bar{\varphi}}{2}}\right] > 0$$

ce qui résulte de (3.3) et (3.4).

Si  $a \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $\theta(I) = \frac{a}{4}[1, 2\varphi]$  est négativement réduit, car  $2\varphi + [-2\bar{\varphi}] \geq 2\varphi + 2[-\bar{\varphi}] > 0$ . Ceci achève de prouver la proposition 6.

Soit maintenant  $E$  l'ensemble des idéaux négativement réduits de  $O_{4D}$ . Nous considérons la partition suivante de  $E$  en trois sous-ensembles  $E_1, E_2, E_3$ . Soit  $I = a[1, \varphi]$  un idéal primitif de  $O_{4D}$ , négativement réduit. Alors

$$\begin{aligned} I \in E_1 & \quad \text{si} \quad a \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{et} \quad \theta(I) \quad \text{est négativement réduit,} \\ I \in E_2 & \quad \text{si} \quad a \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{et} \quad \theta(I) \quad \text{n'est pas négativement réduit,} \\ I \in E_3 & \quad \text{si} \quad a \equiv 0 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Soit  $E^*$  l'ensemble des idéaux négativement réduits de  $O_D$ . Nous définissons une application  $\psi$  de  $E$  dans  $E^*$  de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \psi(I) &= \theta(I), \quad \text{si } I \in E_1, \quad \text{ou } I \in E_3, \\ \psi(I) &= (\theta(I))', \quad \text{si } I \in E_2, \end{aligned}$$

de sorte que  $\psi(I) \in \theta(C)$ , où  $C$  désigne la classe de  $I$ .

Les propositions suivantes ne sont vraies que si  $D \equiv 5 \pmod{8}$ . Ce qui distingue ce cas est que, si  $D \equiv 5 \pmod{8}$ , pour tout idéal

$$J = \left[ a, \frac{b + \sqrt{D}}{2} \right] \text{ on a } a \equiv c \equiv 1 \pmod{2}.$$

**PROPOSITION 7.** *Si  $D \equiv 5 \pmod{8}$  la restriction de  $\psi$  à  $E_3$  est surjective. L'image réciproque d'un idéal  $J \in E^*$  a deux éléments si  $J$  est réduit, un seul si  $J$  n'est que négativement réduit.*

*Démonstration.* Soit  $J = a[1, \omega]$  un élément de  $E^*$ . On peut supposer  $0 < \bar{\omega} < 1 < \omega$ . Les idéaux de  $\psi^{-1}(J)$  appartenant à  $E_3$  sont à chercher parmi les idéaux  $4a \left[ 1, \frac{\omega + k}{2} \right]$  où  $k \in \mathbf{Z}$ , c'est-à-dire parmi les idéaux  $I_1 = 4a \left[ 1, \frac{\omega}{2} \right]$  et  $I_2 = 4a \left[ 1, \frac{\omega + 1}{2} \right]$ . Les idéaux  $I_1$  et  $I_2$  sont primitifs et  $I_2$  est négativement réduit alors que  $I_1$  l'est si, et seulement si,  $\omega > 2$  ce qui signifie que  $J$  est réduit.

**PROPOSITION 8.** *Si  $D \equiv 5 \pmod{8}$  les restrictions de  $\psi$  à  $E_1$  et à  $E_2$  sont des bijections de  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) sur  $E^*$ .*

*Démonstration.* Soit  $\psi_1$  la restriction de  $\psi$  à  $E_1$ , et soit  $J = a[1, \omega] \in E^*$ . On a  $\omega + [-\bar{\omega}] > 0$ , donc  $I = a[1, 2\omega]$  est négativement réduit et, comme  $a \equiv 1 \pmod{2}$ , on a  $\theta(I) = J$  et  $I \in E_1$ , ce qui montre que  $\psi_1$  est surjective. Soit  $I_1 = a_1[1, \varphi_1]$  un idéal de  $E_1$  tel que  $\psi_1(I_1) = J$ ; alors

$\theta(I_1) = a_1 \left[ 1, \frac{\varphi_1}{2} \right] = J$ , d'où  $a_1 = a$  et  $\varphi_1 \equiv 2\omega \pmod{2}$ , ce qui montre que  $I_1 = I$  et que  $\psi_1$  est injective.

Considérons maintenant la restriction  $\psi_2$  de  $\psi$  à  $E_2$ . Soit  $J$  un idéal de  $E^*$  et  $\omega$  le nombre négativement réduit associé à  $J$ . Les idéaux  $J_-$  donnant  $J$  par une étape de réduction négative sont définis par les nombres  $\frac{-1}{\omega + n}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ).

Comme  $\frac{-2}{\omega + n}$  est un nombre de discriminant  $4D$ , les idéaux  $\psi_2^{-1}(J)$  sont, parmi les idéaux définis par les nombres  $\frac{-2}{\omega + n}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ), ceux qui sont négativement réduits sans que  $J_-$  le soit, ce qui se traduit par

$$\frac{-1}{\omega + n} + \left[ \frac{1}{\bar{\omega} + n} \right] < 0, \quad \frac{-2}{\omega + n} + \left[ \frac{2}{\bar{\omega} + n} \right] > 0$$

d'après le lemme 2, c'est-à-dire

$$(3.5) \quad 2 \left[ \frac{1}{\bar{\omega} + n} \right] < \frac{2}{\omega + n} < \left[ \frac{2}{\bar{\omega} + n} \right].$$

Tenant compte de ce que  $0 < \bar{\omega} < 1 < \omega$ , on vérifie que  $n = 1$  est la seule valeur de  $n$  qui satisfait (3.5), ce qui montre que  $\psi_2$  est bijective et achève de prouver la proposition 8.

Des propositions 7 et 8 résulte immédiatement le résultat suivant:

**THÉORÈME 2.** Soit  $D \equiv 5 \pmod{8}$  un discriminant  $> 0$ . Soit  $N_-$  le nombre des idéaux primitifs négativement réduits de  $O_{4D}$ , et soient  $N_-^*$  et  $N^*$  respectivement le nombre des idéaux primitifs négativement réduits et réduits de  $O_D$ . Alors

$$(3.6) \quad N_- = 3N_-^* + N^*.$$

L'application  $\psi$  étant compatible avec l'homomorphisme  $\theta$  le résultat plus précis suivant est vrai.

**THÉORÈME 3.** Soit  $D \equiv 5 \pmod{8}$  un discriminant  $> 0$ . Soit  $C^*$  une classe d'idéaux au sens strict de  $O_D$  et  $\theta^{-1}(C^*)$  son image inverse par  $\theta$ . Soit  $L_-$  le nombre des idéaux primitifs négativement réduits de  $\theta^{-1}(C^*)$  et soient  $L_-^*$  et  $L^*$  le nombre des idéaux primitifs respectivement négativement réduits et réduits de  $C^*$ . Alors:

$$(3.7) \quad L_- = 3L_-^* + L^*.$$

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 1. On sait que

$$(3.8) \quad \text{Card}(\text{Ker } \theta) = \begin{cases} 3, & \text{si } (1.1) \text{ n'a pas de solution impaire,} \\ 1, & \text{si } (1.1) \text{ a des solutions impaires.} \end{cases}$$

Ce résultat était déjà connu de Gauss ([2], §256, VI); d'autres démonstrations se trouvent dans [8], §151 et [5], page 172.

Le Théorème 1 est une conséquence immédiate de (3.7) et (3.8).

*Remarque.* Les résultats analogues aux Théorèmes 2 et 3 quand  $D \equiv 1 \pmod{8}$  seront exposés dans un article ultérieur.

#### §4. EXEMPLES NUMÉRIQUES

##### a) THÉORÈME 2.

Nous donnons les valeurs de  $N_-$ ,  $N_-^*$  et  $N^*$  pour tous les  $D \equiv 5 \pmod{8}$  de 5 à 109, et pour 141 et 165 que nous étudierons en b).

| $D$ | $N_-$ | $N_-^*$ | $N^*$ |
|-----|-------|---------|-------|
| 5   | 4     | 1       | 1     |
| 13  | 10    | 3       | 1     |
| 21  | 14    | 4       | 2     |
| 29  | 16    | 5       | 1     |
| 37  | 24    | 7       | 3     |
| 45  | 20    | 6       | 2     |
| 53  | 22    | 7       | 1     |
| 61  | 36    | 11      | 3     |
| 69  | 34    | 10      | 4     |
| 77  | 26    | 8       | 2     |
| 85  | 46    | 14      | 4     |
| 93  | 38    | 12      | 2     |
| 101 | 36    | 11      | 3     |
| 109 | 58    | 17      | 7     |
| 141 | 58    | 18      | 4     |
| 165 | 60    | 18      | 6     |