Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN

Autor: Kaplan, Pierre / LEONARD, Philip A.

Kapitel: §2. Classes d'idéaux au sens strict et réduction négative

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60422

où l est la longueur de la période d'une classe ambige de discriminant $4D$ et l^* celle de son image par l'homomorphisme θ du groupe des classes de discriminant $4D$ sur le groupe des classes de discriminant D défini dans [7]. La définition de θ est rappelée ci-dessous (Lemme 4).

Le but de ce travail est de montrer comment la méthode de [7], c'est-à-dire l'utilisation des idéaux des anneaux O_D et O_{4D}, permet de généraliser la condition (1.4) de manière analogue à (1.5), et ceci tout en mettant bien en évidence l'intérêt du développement négatif en fraction continue introduit par Mimura [9]. Nous prouvons le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* D *un nombre positif, congru à* 5 *modulo* 8. *Soit* C *une classe d'idéaux* **au sens strict** *de l'ordre* O_{4D} *et* $\theta(C)$ *son image par l'homomorphisme* θ. *Soit* l_- *(respectivement* l^*_-*) le nombre des idéaux primitifs négativement réduits de* C *(respectivement de* $\theta(C)$*) et* l^* *le nombre des idéaux primitifs réduits de* $\theta(C)$. *Alors l'équation* (1.1) *a des solutions impaires si, et seulement si,*

$$l_- = 3l^*_- + l^* . \tag{1.6}$$

Dans la section suivante (§2) nous allons rappeler ou définir les notions intervenant dans l'énoncé du Théorème 1 et exposer la théorie des idéaux négativement réduits et de leurs périodes, pour laquelle il ne semble pas exister de référence accessible.

Dans la troisième section nous prouvons le Théorème 1 après avoir prouvé deux résultats (Théorèmes 2 et 3) permettant de relier les nombres des idéaux primitifs négativement réduits de O_{4D} et O_D avec le nombre des idéaux primitifs réduits de O_D.

Nous terminons en donnant des exemples numériques (§4).

§2. CLASSES D'IDÉAUX AU SENS STRICT ET RÉDUCTION NÉGATIVE

Soit $\Delta > 0$ un discriminant. Il existe un discriminant fondamental D_0 et un entier f positif tels que $\Delta = D_0 f^2$. Soit O_{D_0} l'anneau des entiers de $Q(\sqrt{D_0})$ et O_Δ l'anneau des entiers de conducteur f. Les *idéaux primitifs* de l'anneau O_Δ sont les **Z**-modules $I = \left[a, \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2}\right]$ tels que

$$a > 0 \, , \quad \frac{b^2 - \Delta}{4a} = c \in \mathbf{Z} \, , \quad (a, b, c) = 1 \, , \tag{2.1}$$

c'est-à-dire $I = a[1, \varphi]$ où $\varphi = \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ est déterminé modulo 1 et vérifie (2.1).

Nous dirons que l'idéal I et le nombre φ sont *associés*.

Soit α un nombre non nul de $Q(\sqrt{D_0})$. Nous désignerons par $\bar{\alpha}$ le conjugué $x - y\sqrt{D_0}$ de $\alpha = x + y\sqrt{D_0}$ où x, y sont des nombres rationnels. La proposition suivante permet de définir le discriminant de α.

PROPOSITION 1. *Soit* α *un nombre non nul de* $Q(\sqrt{D_0})$. *Il existe des entiers* $f > 0$, $a > 0$, b *tels que* $\alpha = \dfrac{b + f\sqrt{D_0}}{2a}$ *où* a *et* b *vérifient* (2.1) *avec* $\Delta = f^2 D_0$. *Les nombres* f, a *et* b *sont déterminés par* α.

DÉFINITION. *Le nombre* $\Delta = f^2 D_0$ *est le discriminant de* α.

Pour prouver la proposition 1, nous nous appuierons sur le lemme suivant:

LEMME 1. *Soient* $\alpha = \dfrac{x + y\sqrt{D_0}}{z} = \dfrac{X + Y\sqrt{D_0}}{Z}$, *avec* $(x, y, z) = 1$ *et* $z, Z > 0$. *Alors il existe un entier* $h > 0$ *tel que* $X = hx$, $Y = hy$, $Z = hz$.

Démonstration. Posons $x = d'x'$, $z = d'z' = d''z''$, $y = d''y''$ avec $(x', z') = (y'', z'') = (d', d'') = 1$, et d' et $d'' > 0$. Alors on voit qu'il existe $k > 0$ tel que $z' = kd''$, $z'' = kd'$ d'où $z = kd'd''$.

D'autre part on a $xZ = zX$ et $yZ = zY$ d'où $x'Z = kd''X$ et $y''Z = kd'Y$. Comme $(x', kd'') = (y'', kd') = 1$ on voit qu'il existe des entiers X' et Y'' tels que $X = x'X'$ et $Y = y''Y''$, d'où résulte $Z = kd''X' = kd'Y''$. Comme $(d', d'') = 1$ on voit qu'il existe h tel que $X' = hd'$, $Y'' = hd''$ ce qui donne $X = hd'x'$, $Y = hd''y''$, $Z = hkd'd''$, ce qu'il fallait prouver.

Démonstration de la proposition 1

D'après le lemme 1 les entiers $2a$, f et b sont à chercher parmi les nombres hz, hy et hx, et il suffit de montrer qu'il existe un et un seul entier $h > 0$ tel que

(2.2) $$h\frac{D_0 y^2 - x^2}{2z} = c \in \mathbf{Z}\,, \qquad (hz, 2hy, 2c) = 2\,.$$

Posons $\dfrac{D_0 y^2 - x^2}{2z} = \dfrac{r}{s}$ avec $s > 0$ et $(r, s) = 1$. Les solutions de la première égalité (2.2) sont $h = ks$ et alors $c = kr$, où, d'après la seconde égalité (2.2), k est déterminé par $(ksz, 2ksy, 2kr) = 2$. Si un nombre premier p divisait sz,

sy et r, il diviserait y, z et $D_0 y^2 - x^2$, donc x, y et z, ce qui n'est pas possible. Donc si sz est pair, la valeur de k qui convient est 1 et, si sz est impair, la valeur de k qui convient est $k = 2$. Ceci achève de prouver la proposition 1.

De la proposition 1 résulte immédiatement le résultat suivant

COROLLAIRE 1. *Les nombres associés aux idéaux primitifs de l'anneau* O_Δ *sont les nombres de discriminant* Δ.

Deux idéaux $I = a[1, \varphi]$ et $J = b[1, \psi]$ sont dits *équivalents au sens strict* s'il existe $\rho \in Q(\sqrt{D_0})$ tel que $N(\rho) > 0$ et $J = \rho I$. D'après [7], Proposition 3, c'est le cas si, et seulement si, il existe $p, q, r, s \in \mathbf{Z}$ tels que $ps - qr = 1$ et $\psi = \dfrac{p\varphi + q}{r\varphi + s}$. On dit alors que φ et ψ sont strictement équivalents. L'équivalence stricte implique l'équivalence usuelle, et l'on sait qu'un idéal $J = b[1, \psi]$ équivalent à un idéal $I = a[1, \varphi]$ primitif de O_Δ est un idéal primitif de O_Δ ([7], Corollary 3); ceci montre que le discriminant d'un nombre est conservé par équivalence.

L'ensemble des classes d'équivalence d'idéaux pour l'équivalence stricte contenant des idéaux primitifs forme un groupe fini C_Δ^+ pour la multiplication induite par la multiplication des idéaux, isomorphe au groupe des classes de formes quadratiques binaires primitives de discriminant Δ pour la composition.

Passons maintenant à la réduction. Un nombre φ de discriminant Δ est dit *réduit* si

$$-1 < \bar{\varphi} < 0\,, \qquad 1 < \varphi\,, \tag{2.3}$$

négativement réduit si

$$0 < \bar{\varphi} < 1 < \varphi\,. \tag{2.4}$$

L'idéal $I = a[1, \varphi]$ est dit *réduit* (respectivement *négativement réduit*) si l'on peut choisir φ modulo 1 de manière à vérifier (2.3) (respectivement 2.4). Alors on voit que

PROPOSITION 2. *Tout idéal réduit est négativement réduit.*

Démonstration. Soit $I = a[1, \varphi]$ où φ vérifie (2.3). Alors $I = a[1, \varphi + 1]$ où $\varphi + 1$ vérifie (2.4).

Plus généralement on a

LEMME 2. *L'idéal* $I = a[1, \varphi]$ *est réduit si, et seulement si,* $\varphi + [-\bar{\varphi}] > 1$, *négativement réduit si, et seulement si,* $\varphi + [-\bar{\varphi}] > 0$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout nombre réel φ non entier on a $-1 < \bar{\varphi} + [-\bar{\varphi}] < 0$ et $0 < \bar{\varphi} + [-\bar{\varphi}] + 1 < 1$.

Tout idéal primitif réduit (respectivement négativement réduit) I de O_Δ s'écrit de *manière unique* $I = a[1, \varphi]$ où φ est un nombre réduit (respectivement négativement réduit) de $Q(\sqrt{D_0})$ de discriminant Δ. Nous dirons que l'idéal I et le nombre φ sont *associés.*

Il est bien connu que le nombre des idéaux réduits primitifs de O_Δ est fini. La proposition suivante montre qu'il en est de même pour les idéaux négativement réduits.

PROPOSITION 3. *L'ensemble des nombres négativement réduits de discriminant* Δ *donné est un ensemble fini. Le nombre des idéaux négativement réduits primitifs de* O_Δ *est fini.*

Démonstration. Pour montrer les deux assertions de la Proposition 3, il suffit de montrer que le nombre des solutions (b, a, c) de

(2.5) $$0 < \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} < 1 < \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad b^2 = \Delta + 4ac$$

est fini. Comme (2.5) implique

(2.6) $$0 < b - \sqrt{\Delta} < 2a, \qquad 2c < b + \sqrt{\Delta}$$

nous posons $2a = b - \alpha$, $2c = b - \alpha'$; alors $b^2 = \Delta + 4ac$ entraîne

(2.7) $$\Delta + \alpha\alpha' = b(\alpha + \alpha').$$

D'après (2.6) on a $b > \sqrt{\Delta} > |\alpha|, |\alpha'|$. De plus $\alpha \equiv \alpha' \equiv b \equiv \Delta \pmod 2$, donc $\alpha + \alpha' \equiv 0 \pmod 2$, et $\alpha + \alpha' \geqslant 2$.

Si $\alpha\alpha' = 0$ alors Δ est pair et (2.7) montre que $\Delta \equiv 0 \pmod{2b}$ donc $b \leqslant \dfrac{\Delta}{2}$.

Si $\alpha\alpha' > 0$ alors $\Delta < \Delta + \alpha\alpha' = b(\alpha + \alpha') < 2\Delta$. Donc α et $\alpha' > 0$. Si $\alpha = \alpha' = 1$ alors $b = \dfrac{\Delta + 1}{2}$; sinon $\alpha + \alpha' \geqslant 4$ donc $b < \dfrac{\Delta}{2}$.

Si $\alpha\alpha' < 0$ alors $0 < \Delta + \alpha\alpha' = b(\alpha + \alpha') < \Delta$, donc $b < \dfrac{\Delta}{2}$.

Ainsi $\sqrt{\Delta} < b \leqslant \dfrac{\Delta}{2}$ si Δ est pair, $\sqrt{\Delta} < b \leqslant \dfrac{\Delta + 1}{2}$ si Δ est impair, ce qui prouve que le nombre des b, et par suite celui des triplets (b, c, a), satisfaisant à (2.5) est fini. Ceci termine la démonstration de la proposition 3.

Considérons maintenant le processus de réduction négative.

Soit $\varphi_0 = \dfrac{b_0 + \sqrt{\Delta}}{2a_0}$ $(a_0 > 0)$ un nombre de discriminant Δ. Supposons φ_n défini; nous définissons φ_{n+1} par

$$q_n = [\varphi_n + 1] , \qquad \varphi_n = q_n - \frac{1}{\varphi_{n+1}} . \tag{2.8}$$

On voit que φ_{n+1} est strictement équivalent à φ_n et que $\varphi_n > 1$ et $q_n \geqslant 2$ pour $n \geqslant 1$. De plus on a

$$\varphi_0 = q_0 - \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{1}{q_n - \cfrac{1}{\varphi_{n+1}}}}}} . \tag{2.9}$$

Inversement φ_0 étant donné la condition $\varphi_n > 1$ $(n \geqslant 1)$ et (2.9) définissent les q_i de manière unique.

Si φ_n est négativement réduit alors $0 < \bar{\varphi}_n < 1$ donc, comme $q_n \geqslant 2$, on a $0 < \bar{\varphi}_{n+1} < 1$ ce qui montre que φ_{n+1} est négativement réduit.

Au nombre $\varphi_n = \dfrac{b_n + \sqrt{\Delta}}{2a_n}$ $(a_n > 0)$ est associé l'idéal I_n tel que

$$I_n = a_n [1, \varphi_n] = \left[a_n , \frac{b_n + \sqrt{\Delta}}{2} \right] ,$$

et tous les idéaux I_n sont *strictement* équivalents entre eux.

Comme (Proposition 3) le nombre des nombres négativement réduits de discriminant Δ est fini on voit, comme dans la théorie des idéaux réduits, que les nombres φ négativement réduits de discriminant Δ, ainsi que les idéaux I associés se répartissent en un nombre fini de périodes.

Définissons maintenant deux suites d'entiers A_n et $B_n (n \geqslant -2)$ par

$$\begin{cases} A_{-2} = 0 , & A_{-1} = +1 , \quad A_n = q_n A_{n-1} - A_{n-2} , \\ B_{-2} = -1 , & B_{-1} = 0 , \quad B_n = q_n B_{n-1} - B_{n-2} . \end{cases} \tag{2.10}$$

On vérifie par récurrence sur n les relations suivantes

$$\varphi_n = \frac{B_{n-2}\varphi_0 - A_{n-2}}{B_{n-1}\varphi_0 - A_{n-1}} , \qquad \varphi_0 = \frac{A_{n-1}\varphi_n - A_{n-2}}{B_{n-1}\varphi_n - B_{n-2}} , \qquad (n \geqslant 0) , \tag{2.11}$$

(2.12) $$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = -1\,, \quad (n \geqslant -1)\,,$$

(2.13) $$\varphi_1 \cdots \varphi_n = B_{n-1}\varphi_n - B_{n-2}\,, \quad (n \geqslant 1)\,,$$

(2.14) $$B_n \geqslant B_{n-1} + 1 \geqslant 1\,, \quad \text{d'où } B_n \geqslant n+1\,, \quad (n \geqslant 0)\,,$$

(2.15) $$A_n - \varphi_0 B_n = \frac{-1}{B_n \varphi_{n+1} - B_{n-1}}\,.$$

Définissons le nombre θ_n par

(2.16) $$\theta_n = \varphi_1 \ldots \varphi_n\,.$$

Nous pouvons maintenant montrer, avec les notations qui précèdent, la

PROPOSITION 4. *Pour n assez grand le nombre φ_n et l'idéal I_n sont négativement réduits. Le nombre θ_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Soit $\varphi_0 = \dfrac{b_0 + \sqrt{\Delta}}{2a_0}$ avec $a_0 > 0$. Nous avons

$$\varphi_1 = \frac{1}{q_0 - \varphi_0} > 1 \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_1 = \frac{1}{q_0 - \varphi_0 + (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)}\,, \quad \text{donc} \quad 0 < \bar{\varphi}_1 < \varphi_1\,.$$

Remplaçant φ_0 par φ_1 si nécessaire nous pouvons supposer $0 < \bar{\varphi}_0 < \varphi_0$. De (2.11) et (2.12) on déduit

$$\varphi_0 - \bar{\varphi}_0 = \frac{\varphi_n - \bar{\varphi}_n}{(B_{n-1}\varphi_n - B_{n-2})\,(B_{n-1}\bar{\varphi}_n - B_{n-2})}$$

Supposons $\bar{\varphi}_n > 1$. D'après (2.14) on a $B_{n-1}\bar{\varphi}_n - B_{n-2} > 1$ et $B_{n-1} \geqslant B_{n-2} + 1$, donc

$$\varphi_0 - \bar{\varphi}_0 < \frac{\varphi_n - 1}{B_{n-1}\varphi_n - B_{n-1} + 1} = \frac{1}{B_{n-1} + \dfrac{1}{\varphi_n - 1}} < \frac{1}{B_{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}$$

ce qui n'est pas possible pour n assez grand donc il existe n_0 tel que, à partir de n_0, φ_n est négativement réduit.

Pour montrer que $\theta_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, il suffit de remarquer que $\varphi_i > 1$ pour $i \geqslant 1$ et que φ_i ne prend qu'un nombre fini de valeurs pour $i \geqslant n_0$. Ceci achève de prouver la Proposition 4.

L'étape suivante consiste à montrer que deux nombres strictement équivalents négativement réduits sont dans la même période négative. Nous adaptons le raisonnement classique (voir par exemple [3] § 10-6, 10-10, 10-11 ou [11] §29) à notre objet en nous référant à [11], Satz 5.2, qui dit que chaque nombre réel a un développement en fraction continue négative bien déterminé. Nous commençons par le

LEMME 3. *Si* $\varphi_0 = \dfrac{P\psi - Q}{R\psi - S}$ *avec* $PS - QR = -1$, $R > S > 0$, *et* $\psi > 1$ *alors il existe* n *tel que* $\psi = \varphi_n$.

Démonstration. Nous appliquons le processus (2.8), (2.9) au nombre rationnel $\dfrac{P}{R} = \varphi_0'$. Dans ce cas (2.8) s'écrit successivement

$$P = q_0'R - r_1\,, \quad \varphi_0' = \frac{P}{R}\,, \quad q_0' = \left[\frac{P}{R} + 1\right], \quad 0 \leqslant r_1 < R\,,$$

$$R = q_1'r_1 - r_2\,, \quad \varphi_1' = \frac{R}{r_1} \quad q_1' = [\varphi_1' + 1] \geqslant 2\,, \quad 0 \leqslant r_2 < r_1\,,$$

. . . .

$$r_{n-1} = q_n' r_n - r_{n+1}\,, \quad \varphi_n' = \frac{r_{n-1}}{r_n}\,, \quad q_n' = [\varphi_n' + 1] \geqslant 2\,, \quad 0 \leqslant r_{n+1} < r_n\,,$$

. . . .

$$r_{N-1} = q_N' r_n - r_{n+1}\,, \quad \varphi_N' = \frac{r_{N-1}}{r_N} = q_N'\,, \quad q_N' = [\varphi_N' + 1] \geqslant 2\,, \quad r_{N+1} = 0\,.$$

Le fait qu'il existe N tel que $r_{N+1} = 0$ vient de ce que la suite des entiers positifs r_i est strictement décroissante. Tenant compte de (2.11) et (2.10) il vient

$$\frac{P}{R} = \frac{A_{N-1}q_N' - A_{N-2}}{B_{N-1}q_N' - B_{N-2}} = \frac{A_N}{B_N}\,,$$

puis, comme $(P, R) = (A_N, B_N) = 1$, R et $B_N > 0$ on voit que $P = A_N$, $R = B_N$ d'où $-1 = PS - RQ = PB_{N-1} - RA_{N-1}$, donc $P(S - B_{N-1}) = R(Q - A_{N-1})$.

Comme $(P, R) = 1$, R divise $S - B_{N-1}$, ce qui n'est possible que si $S = B_{N-1}$ car $0 < S < R$ et $0 \leqslant B_{N-1} < B_N = R$. Donc on a:

$$\varphi_0 = \frac{A_N\psi - A_{N-1}}{B_N\psi - B_{N-1}}\,.$$

Ceci s'écrit

$$\varphi_0 = q_0' - \cfrac{1}{q_1' - \cfrac{1}{q_2' - \cfrac{\ddots}{ - \cfrac{1}{q_N' - \cfrac{1}{\psi}}}}}$$

c'est-à-dire (2.9) pour $N = n$ où q_i est remplacé par q_i' *et* φ_{N+1} par ψ. En développant ψ en fraction continue négative on trouve **le** développement de φ_0 en fraction continue négative ([11], Satz 5.2), donc $q_i' = q_i$ et $\psi = \varphi_{N+1}$, ce qui démontre le lemme 3.

PROPOSITION 5. *Deux nombres négativement réduits strictement équivalents sont dans la même période.*

Démonstration. Supposons $\psi = \dfrac{a\varphi - b}{c\varphi - d}$ avec a, b, c, d entiers tels que $ad - bc = -1$, où nous pouvons supposer $c\varphi - d > 0$ en changeant, si nécessaire, les signes de a, b, c et d. Développons $\varphi = \varphi_0$ en fraction continue négative et remplaçons; il vient

$$\psi = \frac{P\varphi_n - Q}{R\varphi_n - S} \text{ avec } R = cA_{n-1} - dB_{n-1}, S = cA_{n-2} - dB_{n-2}\,.$$

D'après (2.13) et (2.15) on a $A_{n-1} = \varphi B_{n-1} - \dfrac{1}{\theta_{n-1}}$, $A_{n-2} = \varphi B_{n-2} - \dfrac{1}{\theta_{n-2}}$, d'où

$$R = B_{n-1}(c\varphi - d) - \frac{c}{\theta_{n-1}}\,,\quad S = B_{n-2}(c\varphi - d) - \frac{c}{\theta_{n-2}}\,.$$

Comme $B_{n-1} \geqslant n$, $B_{n-2} \geqslant n - 1$, $B_{n-1} \geqslant B_{n-2} + 1$ et que θ_{n-1} et $\theta_{n-2} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, on voit que pour n assez grand $R > S > 0$ ce qui, d'après le Lemme 3, montre que φ_n est dans la période de ψ et prouve la Proposition 5.