

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	39 (1993)
<b>Heft:</b>	3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN
<b>Autor:</b>	Kaplan, Pierre / LEONARD, Philip A.
<b>Kapitel:</b>	§1. Introduction
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-60422">https://doi.org/10.5169/seals-60422</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN

par Pierre KAPLAN et Philip A. LEONARD

### § 1. INTRODUCTION

Le problème d'Eisenstein [1] dont il sera question ici est la détermination des entiers positifs  $D \equiv 5 \pmod{8}$  tels que l'équation

$$(1.1) \quad X^2 - DY^2 = 4$$

a des solutions impaires. Si l'équation

$$(1.2) \quad T^2 - DU^2 = -4$$

a des solutions entières, les longueurs  $l_0$  et  $l_0^*$  des périodes des développements en fraction continue de  $\sqrt{D}$  et  $(1 + \sqrt{D})/2$  respectivement sont des nombres impairs et l'on sait ([6]) que, alors, (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,

$$(1.3) \quad l_0 \equiv l_0^* \pmod{4}.$$

Récemment Y. Mimura ([9]) a eu l'idée très intéressante et originale d'introduire le développement négatif en fraction continue de nombres irrationnels quadratiques réels et les périodes de ceux qui sont négativement réduits pour montrer que l'équation (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,

$$(1.4) \quad l_{0-} = 3l_{0-}^* + \frac{l_0^*}{k}$$

où  $l_{0-}$  et  $l_{0-}^*$  sont les longueurs des périodes négatives de  $\sqrt{D}$  et  $(1 + \sqrt{D})/2$  respectivement, et  $k = 1$  ou  $2$  suivant que (1.2) a, ou non, des solutions.

En fait, la condition (1.3) avait été généralisée et pouvait être remplacée ([4]) par

$$(1.5) \quad l \equiv l^* \pmod{4}$$

où  $l$  est la longueur de la période d'une classe ambiguë de discriminant  $4D$  et  $l^*$  celle de son image par l'homomorphisme  $\theta$  du groupe des classes de discriminant  $4D$  sur le groupe des classes de discriminant  $D$  défini dans [7]. La définition de  $\theta$  est rappelée ci-dessous (Lemme 4).

Le but de ce travail est de montrer comment la méthode de [7], c'est-à-dire l'utilisation des idéaux des anneaux  $O_D$  et  $O_{4D}$ , permet de généraliser la condition (1.4) de manière analogue à (1.5), et ceci tout en mettant bien en évidence l'intérêt du développement négatif en fraction continue introduit par Mimura [9]. Nous prouvons le résultat suivant:

**THÉORÈME 1.** *Soit  $D$  un nombre positif, congru à 5 modulo 8. Soit  $C$  une classe d'idéaux au sens strict de l'ordre  $O_{4D}$  et  $\theta(C)$  son image par l'homomorphisme  $\theta$ . Soit  $l_-$  (respectivement  $l^*_-$ ) le nombre des idéaux primatifs négativement réduits de  $C$  (respectivement de  $\theta(C)$ ) et  $l^*$  le nombre des idéaux primatifs réduits de  $\theta(C)$ . Alors l'équation (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,*

$$(1.6) \quad l_- = 3l^*_+ + l^* .$$

Dans la section suivante (§ 2) nous allons rappeler ou définir les notions intervenant dans l'énoncé du Théorème 1 et exposer la théorie des idéaux négativement réduits et de leurs périodes, pour laquelle il ne semble pas exister de référence accessible.

Dans la troisième section nous prouvons le Théorème 1 après avoir prouvé deux résultats (Théorèmes 2 et 3) permettant de relier les nombres des idéaux primatifs négativement réduits de  $O_{4D}$  et  $O_D$  avec le nombre des idéaux primatifs réduits de  $O_D$ .

Nous terminons en donnant des exemples numériques (§ 4).

## § 2. CLASSES D'IDÉAUX AU SENS STRICT ET RÉDUCTION NÉGATIVE

Soit  $\Delta > 0$  un discriminant. Il existe un discriminant fondamental  $D_0$  et un entier  $f$  positif tels que  $\Delta = D_0 f^2$ . Soit  $O_{D_0}$  l'anneau des entiers de  $Q(\sqrt{D_0})$  et  $O_\Delta$  l'anneau des entiers de conducteur  $f$ . Les *idéaux primatifs* de l'anneau  $O_\Delta$  sont les  $\mathbf{Z}$ -modules  $I = \left[ a, \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2} \right]$  tels que

$$(2.1) \quad a > 0, \quad \frac{b^2 - \Delta}{4a} = c \in \mathbf{Z}, \quad (a, b, c) = 1,$$

c'est-à-dire  $I = a[1, \varphi]$  où  $\varphi = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  est déterminé modulo 1 et vérifie (2.1).