Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE REMARQUE SUR LE SPECTRE DES SOLUTIONS MATRICIELLES DE L'ÉQUATION DE RICCATI

Autor: Otal, Jean-Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59478

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 38 (1992), p. 3-11

P 74771 S

UNE REMARQUE SUR LE SPECTRE DES SOLUTIONS MATRICIELLES DE L'ÉQUATION DE RICCATI

ETH-BIBLIOTHEK ZÜRICH Sto.

par Jean-Pierre OTAL

Soit M une variété compacte de dimension $n+1$, munie d'une métrique riemannienne de courbure strictement négative. Le flot géodésique ϕ_t de cette métrique laisse invariante la mesure de Liouville normalisée sur le fibré unitaire $T^1(M)$, mesure que nous noterons λ. Nous nous intéressons dans cette note à estimer l'entropie de la mesure λ pour le flot ϕ_t: nous déduirons d'un théorème de comparaison pour l'équation de Riccati (Théorème 2) une inégalité vérifiée par les exposants de Lyapounov du flot géodésique qui contient comme cas particulier une nouvelle minoration de l'entropie de la mesure λ (Corollaire 5).

Rappelons d'abord brièvement la géométrie du revêtement universel $\tilde{M}$ de M; c'est une variété difféomorphe à l'espace euclidien qui se compactifie en une boule topologique par l'ajout d'une sphère à l'infini (cf. [Kl]). A un vecteur v de $T^1(\tilde{M})$ sont associées deux sous-variétés. L'une, dite *stable,* est formée des vecteurs dont l'orbite par le flot géodésique ϕ_t est asymptote à celle de v lorsque t tend vers $+\infty$; l'autre, dite *instable,* est caractérisée par la même propriété lorsque t tend vers $-\infty$. Chacune d'elles est difféomorphe à l'espace $\mathbf{R}^n$ et se projette difféomorphiquement par l'application $\pi: T^1(\tilde{M}) \to \tilde{M}$ sur la variété $\tilde{M}$.

On notera H_v, l'image de la sous-variété instable du point v: c'est donc une hypersurface passant par le point $\pi(v)$, orthogonale au vecteur v en ce point. Sa géométrie au point $\pi(v)$ est décrite par la deuxième forme fondamentale, qui mesure la dérivée de la normale unitaire le long de H_v, et nous choisirons la normale pointant dans la même direction que v. C'est un endomorphisme symétrique de $T^1(M)$ dans lui-même; pour l'horosphère instable, cet endomorphisme A_v est strictement positif, alors qu'il est négatif pour l'horosphère stable.

Une formule de Pesin (cf. [P]) exprime l'entropie h_λ de la mesure de Liouville de la manière suivante:

$$h_\lambda = \int_{T^1(M)} tr A_v d\lambda .$$

Le terme trA_v, trace de l'endomorphisme A_v s'interprète comme la *courbure moyenne* de l'horosphère H_v au point $\pi(v)$.

Rappelons que la fonction $v \mapsto A_v$ est hölderienne; donc le théorème ergodique de Birkhoff nous permet de remplacer l'intégrale spatiale dans la formule de Pesin par une intégrale le long de presque toute géodésique.

Fixons un vecteur $v \in T^1(M)$. Le long de l'orbite $t \mapsto \phi_t(v)$ l'endomorphisme $A_{\phi_t(v)}$, que nous noterons $A(t)$ est solution de l'équation de Riccati:

$$A'(t) + A^2(t) + R(t) = 0 .$$

Dans la formule précédente $A'(t)$ est la dérivée covariante de $A(t)$ le long de la géodésique $t \mapsto \pi \circ \phi_t(v)$ et $R(t)$ est l'opérateur de courbure dans la direction du vecteur $\phi_t(v)$. Dans une base parallèle de l'espace orthogonal du vecteur $\phi_t(v)$ le long de l'orbite $t \mapsto \phi_t(v)$, les opérateurs $A(t)$ et $R(t)$ se représentent par des matrices à n lignes et n colonnes; dans ces coordonnées la dérivation covariante n'est autre que la dérivation usuelle des matrices.

Dans ce qui suit, nous supposerons que la courbure sectionnelle de la variété M est strictement négative et donc que l'opérateur $R(t)$ a un spectre compris entre deux constantes strictement négatives $-a^2$, $-b^2$.

Le résultat suivant devrait être bien connu, mais n'en ayant pas trouvé de référence, nous en donnerons une démonstration.

PROPOSITION 1. *Soit $t \mapsto R(t)$ une fonction C^1 d'un intervalle de $\mathbf{R}$ à valeurs dans les matrices symétriques $n \times n$; notons $\sigma_i(t)$ la i-ème valeur propre par ordre décroissant de $R(t)$. Alors, la fonction $t \mapsto \sigma_i(t)$ est une fonction Lipschitz, dérivable à droite et à gauche en tout point; de plus la constante Lipschitz de σ_i ne dépend que de la norme C^1 de la fonction R.*

Preuve. Il nous suffit de montrer que pour tout k, la somme des k plus grandes valeurs propres de $R(t)$ est une fonction Lipschitz comme dans l'énoncé de l'affirmation précédente.

Rappelons la relation d'ordre suivante sur $\mathbf{R}^n$, bien adaptée à l'étude des valeurs propres des matrices symétriques (cf. [GL]). Soient $X = (x_1, x_2, .., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, .., y_n)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Notons $\bar{X} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ et $\bar{Y} = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$ les vecteurs obtenus à partir de X et de Y en réordonnant leurs coordonnées respectives par ordre décroissant.

Nous écrirons $X \preceq Y$ si et seulement si on a, $\forall k \leqslant n$:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \bar{x}_i \leqslant \sum_{i=1}^{i=k} \bar{y}_i .$$

On notera en outre $X \prec Y$ si $X \preceq Y$ et si

$$\sum_{i=1}^{i=n} \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{y}_i .$$

Si A est une matrice symétrique réelle, on notera $\sigma(A)$ le vecteur de $\mathbf{R}^n$ obtenu en rangeant par ordre décroissant les valeurs propres $\sigma_i(A)$ de la matrice A.

On a alors, pour deux matrices symétriques S et T, l'inégalité suivante de Wielandt (cf. [GL]):

$$\sigma(S+T) - \sigma(T) \prec \sigma(S) . \tag{1}$$

Ecrivons un développement limité à l'ordre 1 de $R(t+h)$ au point t:

$$R(t+h) = R(t) + hR'(t) + ho_t(h) ,$$

où la matrice $o_t(h)$ tend vers 0 uniformément en t lorsque h tend vers 0.

Appliquons la relation (1) aux matrices S et T vérifiant $S + T = R(t+h)$ et $T = R(t) + hR'(t)$, il vient:

$$\sigma(R(t+h)) - \sigma(R(t) + hR'(t)) \prec h\sigma(o_t(h)) .$$

Donc les vecteurs $\frac{1}{h}(\sigma(R(t+h)) - \sigma(R(t)))$ ont les mêmes valeurs d'adhérence dans $\bar{\mathbf{R}}^n$ lorsque h tend vers 0 que les vecteurs $\frac{1}{h}(\sigma(R(t) + hR'(t)) - \sigma(R(t)))$.

Or les coordonnées de la fonction vectorielle $h \mapsto \sigma(R(t) + hR'(t))$ sont des différences de fonctions convexes (ceci découle de (1)). Donc, la limite de de $\frac{1}{h}(\sigma(R(t) + hR'(t)) - \sigma(R(t)))$ existe à droite et à gauche en tout point. De plus, par convexité, la k-ième coordonnée de cette dérivée est bornée en termes des vecteurs $\sigma(R(t) + R'(t)) - \sigma(R(t))$ et $\sigma(R(t) - R'(t)) - \sigma(R(t))$.

Ceci termine la démonstration de la proposition 1. □

Notons $\sigma(-R(t)) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), .., \sigma_n(t))$. Pour étudier une matrice $A(t)$, solution de l'équation de Riccati, nous allons comparer son spectre aux solutions des n équations scalaires:

$$z_i'(t) + z_i^2(t) = \sigma_i(t)$$

pour $i = 1, \ldots, n$.

Puisque la fonction $\sigma_i(t)$ est strictement positive et bornée, il est connu que cette équation possède deux solutions définies sur toute la droite; l'une de ces solutions est strictement positive, l'autre est strictement négative. Nous noterons z_i la solution positive.

Les théorèmes de comparaison classiques (le lemme de Gronvall) entraînent que, en tout point de $\mathbf{R}$, on a: $z_i \leqslant z_{i-1}$ de sorte que le vecteur $(z_i(t))$ a ses coordonnées arrangées par ordre décroissant.

Soit $\lambda(A(t)) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t))$ le spectre, arrangé par ordre décroissant d'une solution $A(t)$ de l'équation $A'(t) + A^2(t) + R(t) = 0$, définie sur un intervalle de $\mathbf{R}$. Rappelons que, puisque la matrice $R(t)$ est symétrique et différentiable comme fonction de t, la matrice $A(t)$ est symétrique, par le théorème d'unicité des solutions d'une équation différentielle.

On a alors:

THÉORÈME 2. *On a, avec les notations précédentes:* $(-\lambda_i(t)) \preceq (-z_i(t))$.

Preuve. La solution $A(t)$ est C^1 en tant que fonction de t; d'après la proposition 1, la fonction $\lambda_i(t)$ possède donc, pour tout i, une dérivée à gauche en tout point. Notons $\lambda_i'(t)$ cette dérivée au point t.

LEMME 3. *Soit $A(t)$ une solution de l'équation de Riccati définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ de spectre $(\lambda_i(t))$. Pour tout $t \in I$, on a:* $\lambda_i'(t) + \lambda_i^2(t)) \prec (\sigma_i(t))$.

Preuve. Soit h un nombre strictement négatif; appliquons la relation (1) aux matrices S et T telles que $S + T = A(t+h)$, $T = A(t) - hA^2(t)$. On a, dès que h est suffisamment petit: $\sigma(A(t) - hA^2(t)) = (\lambda_i(t) - h\lambda_i^2(t))$. Donc,

$$(\lambda_i(t+h) - \lambda_i(t) + h\lambda_i^2(t)) \prec \lambda(A(t+h) - A(t) + hA^2(t)) .$$

On obtient le Lemme 3 en faisant tendre h vers 0, après avoir divisé par h. □

Remarque. Le lemme est encore valable, avec la même démonstration, si le vecteur des dérivées à gauche de $(\lambda_i(t))$ est remplacé par le vecteur des dérivées à droite. En effet: $X \prec Y$ est équivalent à $-X \prec -Y$.

Nous allons appliquer le lemme ci-dessus aux solutions de l'équation de Riccati qui nous intéressent, c'est-à-dire à celles qui sont définies sur toute la droite.

Soit u un nombre réel. On sait, puisque la métrique étudiée est sans point conjugué, que la solution de l'équation de Jacobi $J''(t) + R(t)J(t) = 0$ telle que $J(u) = 0$ et $J'(u) = Id$ est non singulière pour u non nul. La matrice $J'(t)J^{-1}(t) = A^u(t)$ est alors solution de l'équation de Riccati sur la demi-droite $t > u$. Il est connu d'après [G] que

$$A(t) = \lim_{u \to -\infty} A^u(t) .$$

La solution $A^u(t)$ est indéfinie au point u et équivalente à $\dfrac{1}{t-u} Id$ près de ce point.

On peut construire de la même façon chaque solution scalaire $z_i(t)$, à partir de la solution $z_i^u(t)$, équivalente à $\dfrac{1}{t-u}$ près du point u et positive pour $t > u$.

Puisque chaque fonction σ_i est supérieure à b^2, les théorèmes de comparaison classiques entraînent que les fonctions z_i^u sont minorées pour $t > u$ par b (on suppose $b > 0$).

Nous allons montrer que $(-\lambda(A^u(t))) \prec (-z_i^u(t))$ pour tout $t > u$, ce qui entraînera le théorème cherché lorsque u tend vers $-\infty$.

Lemme 4. Soit ε *un nombre réel positif strictement inférieur à* b*; alors on a pour* $k = 1, .., n$*:*

$$(*) \qquad \forall t > u, \sum_{n-k+1}^{n} -\lambda_i(A^u(t)) < \sum_{n-k+1}^{n} (-z_i^u(t) + \varepsilon) .$$

Donc $(-\lambda(A^u(t)) \preceq (-z_i^u(t) + \varepsilon)$.

Preuve. L'inégalité (*) est vérifié pour tout k pour les points t voisins de u puisque, près de ce point on a $\lambda_i^u(t) - \dfrac{1}{t-u} \sim o(1)$, et qu'il en est de même pour chacune des fonctions $z_i^u(t)$. Raisonnons par l'absurde et soit τ le premier temps strictement plus grand que u pour lequel l'une des n inégalités (*) du lemme 4 n'est plus vérifiée. On a alors en ce point pour un certain $k \leqslant n$:

$$\sum_{i=n-k+1}^{i=n} (-\lambda_i^u(\tau)) = \sum_{i=n-k+1}^{i=n} (-z_i^u(\tau) + \varepsilon) ,$$

et

$$\forall k' < k, \sum_{i=n-k'+1}^{i=n} (-\lambda_i^u(\tau)) < \sum_{i=n-k'+1}^{i=n} (-z_i^u(\tau) + \varepsilon) .$$

La fonction $x \mapsto x^2$ étant convexe, les inégalités précédentes entraînent, d'après une inégalité de Karamata (cf. [BB, p. 30]),

$$\sum_{i=n-k+1}^{i=n} (\lambda_i^u)^2 \leqslant \sum_{i=n-k+1}^{i=n} (z_i^u - \varepsilon)^2$$

au point τ.

Donc, puisque les fonctions $z_i - \varepsilon$ sont positives pour $t > u$,

$$\sum_{i=n-k+1}^{i=n} (\lambda_i^u(\tau))^2 \leqslant \sum_{i=n-k+1}^{i=n} (z_i^u(\tau))^2 . \tag{2}$$

Or, puisque $(\lambda_i' + \lambda_i^2) \prec (z_i' + z_i^2)$, on a

$$\sum_{i=n-k+1}^{i=n} (-\lambda_i'(\tau) - \lambda_i^2(\tau) \leqslant \sum_{i=n-k+1}^{i=n} (-z_i'(\tau) - z_i^2(\tau) . \tag{3}$$

Des inégalités (2) et (3), il vient

$$\sum_{i=n-k+1}^{i=n} \lambda_i'(\tau) > \sum_{i=n-k+1}^{i=n} z_i'(\tau) .$$

Mais ceci contredit le choix de τ comme premier temps pour lequel l'une des inégalités (*) n'est pas vérifiée. □

Pour établir le théorème 2, il nous suffit de faire tendre d'abord ε vers 0 dans le lemme 4, puis u vers $-\infty$. □

Nous allons appliquer le théorème 2 à une estimation des exposants de Lyapounov du flot ϕ_t. Pour cela, rappelons comment sont définis les exposants positifs.

Fixons v un vecteur de $T^1(M)$; la différentielle du flot ϕ_t envoie l'espace instable au point v dans l'espace instable au point $\phi_t(v)$. Ces espaces s'identifient respectivement aux espaces tangents des horosphères instables aux points correspondants et nous les munirons de la métrique induite par la métrique de l'horosphère.

Soit $J(t)$ la restriction de la différentielle du flot ϕ_t à l'espace instable au vecteur v: $J(t)$ est solution de l'équation de Jacobi le long de la géodésique $\pi \circ \phi_t(v)$ (cf. [Kl]). La matrice $J'(t) \circ J^{-1}(t)$ est la solution positive $A(t)$ de l'équation de Riccati le long de la géodésique $\pi \circ \phi_t(v)$. Soit $\Lambda_v(t)$ le vecteur formé des logarithmes des valeurs propres de la matrice symétrique

$\sqrt{J(t)^* J(t)}$, ordonnées par ordre décroissant. Rappelons (cf. Proposition 1) que ces valeurs propres sont des fonctions dérivables à droite et à gauche. Notons alors $\Lambda_v'(t)$ la dérivée à droite du vecteur $\Lambda_v(t)$.

Nous utiliserons l'inégalité d'Amir-Moez (cf. [GL], qui est l'analogue multiplicatif de l'inégalité de Wielandt. Notons, pour une matrice non singulière M, $\log(s(M))$ le vecteur formé des logarithmes des valeurs propres de $\sqrt{M^* M}$ rangées par ordre décroissant. L'inégalité d'Amir-Moez affirme alors que si A et B sont deux matrices non singulières, on a

$$\log(s(AB)) - \log(s(A)) \prec \log(s(B)) .$$

Soit h un nombre réel positif; appliquons l'inégalité aux matrices A et B telles que $A = J(t)$ et $AB = J(t+h)$. En notant comme précédemment $A(t)$ la solution positive et partout définie de l'équation de Riccati le long de la géodésique $\pi \circ \phi_t(v)$, on déduit à l'aide d'un développement limité comme dans la démonstration de la proposition 1

$$\Lambda_v'(t) \prec \lambda(A(t)) . \tag{4}$$

On sait que le vecteur Λ des exposants de Lyapounov positifs est la limite quand t tend vers ∞ des vecteurs $\frac{1}{t}\Lambda_v(t)$, qui existe pour presque tout vecteur v (cf. [L]).

Donc le théorème ergodique de Birkhoff et l'inégalité (4) entraînent

$$\Lambda \prec \left(\int_{T^1(M)} \lambda_i(A(v))dv\right) . \tag{5}$$

Du théorème 2, on déduit:

COROLLAIRE 5. *Le vecteur* Λ *vérifie*

$$-\Lambda \preceq \left(-\int_{T^1(M)} z_i(v)dv\right) .$$

En particulier, l'entropie h_λ *de la mesure de Liouville vérifie*

$$h_\lambda \geqslant \sum_{i=1}^{i=n} \int_{T^1(M)} z_i(v)dv . \tag{**}$$

Preuve. Pour justifier l'énoncé précédent, remarquons que, sur une même orbite, la valeur prise par la fonction $z_i(t)$ en un point ne dépend que de ce

point et non de l'origine choisie sur l'orbite; elle définit donc une fonction sur le fibré unitaire $T^1(M)$ que nous avons notée $v \mapsto z_i(v)$. D'autre part en tant que limite de fonctions continues (par construction), la fonction $z_i(v)$ est mesurable; étant bornée, elle est aussi intégrable.

Ceci étant dit, la première partie du corollaire 5 découle de l'inégalité (5) et du théorème 2; l'inégalité (**) découle de la formule de Pesin $h_\lambda = \sum_i \Lambda_i$ et de la première partie du corollaire. □

Remarquons que l'on a

$$\frac{\sigma_i(v)}{z_i(v)} = z_i(v) + \frac{z_i'(v)}{z_i(v)} \ ;$$

or, l'intégrale sur le fibré unitaire du dernier terme de l'égalité précédente est nulle, d'après le théorème ergodique de Birkhoff par exemple, puisque la fonction $\log z_i$ est bornée. Donc,

$$\int_{T^1(M)} z_i(v)\,d\lambda = \int_{T^1(M)} \frac{\sigma_i(v)}{z_i(v)}\,d\lambda \ . \tag{6}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (6) donnent finalement

$$\int_{T^1(M)} \sqrt{\sigma_i(v)}\,d\lambda \leqslant \int_{T^1(M)} z_i(v)\,d\lambda \ .$$

Donc l'inégalité concernant l'entropie du corollaire 5 améliore l'inégalité de Osserman-Sarnak:

$$h_\lambda \geqslant \int_{T^1(M)} \sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{\sigma_i(v)}\,d\lambda = \int_{T^1(M)} tr\left(\sqrt{-R(v)}\right)d\lambda \ . \tag{7}$$

On a en fait:

COROLLAIRE 6. *Le vecteur* Λ *vérifie* $-\Lambda \preceq \left(-\int \sqrt{\sigma_i(v)}\,dv\right)$.

L'inégalité (7), d'abord établie par R. Osserman et P. Sarnak pour une variété M de courbure sectionnelle strictement négative ([OS]), a ensuite été généralisée au cas des variétés sans points conjugués par W. Ballman et Wojtkowsky ([BW]). On peut se demander s'il existe un analogue du théorème 2 dans ce cas.

D'autre part, les démonstrations contenues dans [OS] et [BW] de l'inégalité (7), identifient les variétés riemanniennes pour lesquelles on a égalité dans la formule (7): ce sont les espaces localement symétriques de courbure négative.

On peut se demander s'il en est de même pour l'inégalité (**) du corollaire 5, lorsque la dimension de M est supérieure ou égale à 3. On remarque facilement que l'égalité dans le cas de la formule du corollaire 5 entraîne que les opérateurs $A(v)$ et $R(v)$ commutent pour tout vecteur v, ce qui semble très restrictif sur la métrique en dimension supérieure ou égale à 3 (cf. [C] pour un problème connexe).

Remarque. Le point de départ de cette note fut une conjecture d'Osserman, contenue dans [C] et qui nous semble encore tout aussi intéressante: l'entropie h_λ vérifie la *majoration*:

$$h_\lambda \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{\int_{T^1(M)} \sigma_i(v)\, d\lambda}\ .$$

RÉFÉRENCES

[BB] BECKENBACH, E. et R. BELLMAN. *Inequalities.* Springer Verlag, 1965, pp. 30-32.

[BW] BALLMANN, W. et M. WOJTKOWSKI. An estimate for the measure theoretic entropy of geodesic flows. *Ergod. Th. and Dynam. Syst. 9* (1989), 271-279.

[C] CHI, Q. S. A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces. *J. Differential Geometry 28* (1988), 187-202.

[GL] GLAZMAN, I. et Y. LIUBITCH. *Analyse linéaire dans les espaces de dimensions finies.* Ed. MIR Moscou, 1972.

[G] GREEN, L. W. A theorem of E. Hopf. *Michigan Math. Journal 5* (1958), 31-34.

[Kl] KLINGENBERG, W. *Riemannian geometry.* Walter de Gruyter, 1982.

[L] LEDRAPPIER, F. Quelques propriétés des exposants caractéristiques. *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour,* Springer Lecture Notes 1097.

[OS] OSSERMAN, R. et P. SARNAK. A new curvature invariant and entropy of geodesic flows. *Invent. Math. 77* (1984), 455-462.

[P] PESIN, Ya. B. Formulas for the entropy of a geodesic flow on a compact Riemannian manifold without conjugate points. *Math. Notes 24* (1978), 796-805.

(Reçu le 18 septembre 1990)

Jean-Pierre Otal

Bât. 425, Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay Cedex, France

vide-leer-empty