Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION DE WEIERSTRASS

Autor: Baouche, A. / Dubuc, S.

Kapitel: 3. Cas général

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59484

grand que 1, on a $8b + \pi^2/b > 8 + \pi^2$, car l'équation $8b^2 - (8+\pi^2)b + \pi^2 = 0$ a deux racines $b = 1$ et $b = \pi^2/8$.

Par ailleurs on a aussi que

$$\begin{aligned} &2C(t) - C(t-h) - C(t+h) \\ &= 2\big(C(t) - C(x)\big) + \big(C(x) - C(t-h)\big) + \big(C(x) - C(t-h)\big) . \end{aligned}$$

Un des trois membres $C(t) - C(x)$, $C(x) - C(t+h)$, $C(x) - C(t-h)$ est donc supérieur à $ca^m/4$. Donc on peut trouver un point x_m tel que $|C(x_m) - C(x)| > ca^m/4$ et $|x_m - x| \leqslant 3\pi/(2b^m)$.

Soit $\delta \in]0, 1[$. On peut trouver un entier m tel que $3\pi/(2b^m) \leqslant \delta < 3\pi/(2b^{m-1})$. En se servant de cette dernière inégalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = a$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(2\delta/(3\pi))^\alpha/4$. Pour $\varepsilon = ac(2/(3\pi))^\alpha/4$, le théorème est vérifié.

3. Cas général

a) Sans faire d'autre hypothèse sur b que $b > 1/a$, nous démontrons le théorème pour la fonction de Weierstrass $f(x) = C(x)$.

Soient L, N et m des entiers positifs vérifiant

$$b^L < N\pi \quad \text{et} \quad L < m .$$

Nous introduisons la quantité

$$I = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} C(t) \cos b^m t\, dt$$

où h vaut $N\pi/b^m$.

$$I = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} + \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m}\right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N .$$

Nous ferons appel aux inégalités $|\sin b^n h| \leqslant 1$ si $n \geqslant m - L$ et $|\sin b^n h| \leqslant b^n h$ si $n < m - L$. On a

$$|I - a^m| \leqslant \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^n} + \sum_{n \neq m, n=m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{|b^n - b^m| h} .$$

Nous minorons les quantités $|b^m - b^n|$ par la quantité $b^m - b^{m-1}$:

$$|I - a^m| \leqslant \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^{m-1}} + \sum_{n=m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{(b^m - b^{m-1})h}$$

$$\leqslant \frac{2a^{m-L}b^{m-L}}{(ab-1)(b^m - b^{m-1})} + \frac{2a^{m-L}}{(b^m - b^{m-1})(1-a)h} .$$

On a donc, puisque $b^m h = N\pi > b^L$,

$$|I - a^m| \leqslant \frac{2a^{m-L}b^{-L}}{(ab-1)(1-1/b)} + \frac{2a^{m-L}}{(1-1/b)(1-a)N\pi} < sa^m$$

avec

$$s = \frac{2a^{-L}b^{-L}}{(ab-1)(1-1/b)} + \frac{2a^{-L}}{(1-1/b)(1-a)b^L} .$$

Il est possible de trouver un entier L suffisamment grand pour que $s < 1$. Si $c = (1-s)/2$, alors $c > 0$ et $I > 2ca^m$.

Remarquons que

$$I = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} [C(t) - C(x)] \cos(b^m t)\, dt ;$$

par suite, il existe au moins une valeur de x_m telle que $|x_m - x| \leqslant h$ et $|C(x_m) - C(x)| > ca^m$.

Soit $\delta \in]0, 1[$. On peut trouver un nombre entier $m > L$ tel que

$$h = N\pi / b^m \leqslant \delta < N\pi / b^{m-1} .$$

En se servant de cette dernière égalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = a$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(\delta/(N\pi))^\alpha$. Pour $\varepsilon = ac(1/(N\pi))^\alpha$, le théorème est vérifié.

b) On peut modifier la démonstration précédente pour analyser la fonction $S(x)$. Pour ce faire, on pose

$$J = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} S(t) \sin b^m t\, dt ;$$

on supposera que h vaut $N\pi / b^m$. On a

$$J = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} - \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m}\right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N$$

Par la suite, toutes les inégalités obtenues relatives aux quantités I se transposent de la même façon relativement aux quantités J et l'on établit le théorème pour la fonction $f = S$.

Remarque. D'une façon générale, pour toute suite de phases ϕ_n, les fonctions $f(x)$ de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(b^n x - \phi_n)$ rempliront la conclusion du théorème si $b > 1/a$.

4. CONCLUSION

Nous avons exposé une démonstration très simple de la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass lorsque $b > 1/a$. Cependant nous n'avons pas complètement égalé la performance de Hardy qui a établi que même dans le cas $b = 1/a$, la fonction de Weierstrass est sans dérivée. Il y aurait lieu de simplifier l'argumentation de Hardy également dans ce cas.

RÉFÉRENCES

[1] HARDY, G. H. (1916). Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc. 17,* pp. 301-325.

[2] WEIERSTRASS, F. (1872). Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. *Mathematische Werke II,* pp. 71-74.

(Reçu le 22 juillet 1991)

Amar Baouche et Serge Dubuc
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, succ. A
Montréal (P.Q.)
H3C 3J7 Canada