Démonstration. Soit $\pi : \mathbf{Z}[[\tilde{M}]] \mapsto \mathbf{Z}[[M]]$ l'application définie par

$$\pi\Big(\sum_{p \in \tilde{M}} a_p x^p\Big) = \sum_{p \in M} a_p x^p .$$

C'est un morphisme de $\mathbf{Z}[M]$-modules. Soit $\tilde{S}$ le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^p, p \in \tilde{M} \backslash \{0\}$; et soit $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ engendré par $\tilde{S}^{-1}$ et $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. De l'identité

$$(1 - x^p)^{-1} = (1 - x^{\gamma p})^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\gamma - 1} x^{np} \right) ,$$

résulte que $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] = S^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. Par suite, π s'étend en un unique morphisme de $\mathbf{Z}[M]$-modules, noté encore $\pi : \tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] \mapsto S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On a donc, en posant

$$\tilde{\Phi}_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap \tilde{M}} \omega(m, P) x^m \quad \text{et} \quad \Phi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m :$$

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathscr{C}} \pi(x^s \tilde{\Phi}_\omega(P_s)) .$$

De plus, puisque chaque P_s est rationnel pour le réseau M, on a: $\tilde{\Phi}(P_s) \in S_d^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. Soit $n > 0$ un entier; écrivons $n = q\gamma + r$ où q est entier, et où $1 \leqslant r \leqslant \gamma$. Alors

$$\Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathscr{C}} \pi(x^{ns}\tilde{\Phi}_\omega(P_s)) = \sum_{s \in \mathscr{C}} x^{q\gamma s} \pi(x^{rs}\tilde{\Phi}_\omega(P_s)) .$$

Le résultat s'en déduit comme dans les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2. □

RÉFÉRENCES

[B] BRION, M. Points entiers dans les polyèdres convexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e série, 21* (1988), 653-663.

[D] DEMAZURE, M. Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e série, 3* (1970), 507-588.

[E] EHRHART, E. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. I. *J. Reine Angew Math., 226* (1967), 1-29.

[G] GODEMENT, R. *Théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1958.

[Ha] HADWIGER, H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1957.

[Hi] HIBI, T. Ehrhart polynomials of convex polytopes, *h*-vectors of simplicial complexes and non-singular projective toric varieties. Preprint, juin 1990.

[I] ISHIDA, M. N. Polyhedral Laurent series and Brion's equalities. *International Journal of Math. 1 (3)* (1990), 251-265.

[M] MACDONALD, I. G. Polynomials associated with finite cell-complexes. *J. London Math. Soc. (2), 4* (1971), 181-192.

[MM] MCMULLEN, P. Lattice-invariant valuations on rational polytopes. *Arch. Math., 31* (1978), 509-516.

[O] ODA, T. *Convex bodies and algebraic geometry (An introduction to the theory of toric varieties).* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[PS] PERLES, M. and C. SHEPHARD. Angle sums of convex polytopes. *Math. Scand., 21* (1967), 199-218.

[R] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex analysis.* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[S] STANLEY, R. *Enumerative combinatorics, Vol. I.* Wadsworth and Brooks/Cole, Belmont, 1986.

(Reçu le 18 février 1991)

Michel Brion

Université de Grenoble 1
Institut Fourier
UFR de Mathématiques
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
(France)