

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX

Autor: Brion, Michel

Bibliographie

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59483>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Démonstration. Soit $\pi: \mathbf{Z}[[\tilde{M}]] \mapsto \mathbf{Z}[[M]]$ l'application définie par

$$\pi\left(\sum_{p \in \tilde{M}} a_p x^p\right) = \sum_{p \in M} a_p x^p.$$

C'est un morphisme de $\mathbf{Z}[M]$ -modules. Soit \tilde{S} le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^p, p \in \tilde{M} \setminus \{0\}$; et soit $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ engendré par \tilde{S}^{-1} et $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. De l'identité

$$(1 - x^p)^{-1} = (1 - x^{\gamma p})^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\gamma-1} x^{np} \right),$$

résulte que $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] = S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. Par suite, π s'étend en un unique morphisme de $\mathbf{Z}[M]$ -modules, noté encore $\pi: \tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] \mapsto S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On a donc, en posant

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\omega(P) &= \sum_{m \in P \cap \tilde{M}} \omega(m, P) x^m \quad \text{et} \quad \Phi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m : \\ \Phi_\omega(P) &= \sum_{s \in \mathcal{E}} \pi(x^s \tilde{\Phi}_\omega(P_s)). \end{aligned}$$

De plus, puisque chaque P_s est rationnel pour le réseau M , on a: $\tilde{\Phi}(P_s) \in S_d^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. Soit $n > 0$ un entier; écrivons $n = q\gamma + r$ où q est entier, et où $1 \leq r \leq \gamma$. Alors

$$\Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \pi(x^{ns} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{q\gamma s} \pi(x^{rs} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)).$$

Le résultat s'en déduit comme dans les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2. \square

RÉFÉRENCES

- [B] BRION, M. Points entiers dans les polyèdres convexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4^e série, 21 (1988), 653-663.
- [D] DEMAZURE, M. Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4^e série, 3 (1970), 507-588.
- [E] EHRHART, E. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. I. *J. Reine Angew Math.*, 226 (1967), 1-29.
- [G] GODEMENT, R. *Théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1958.
- [Ha] HADWIGER, H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1957.
- [Hi] HIBI, T. Ehrhart polynomials of convex polytopes, h -vectors of simplicial complexes and non-singular projective toric varieties. Preprint, juin 1990.
- [I] ISHIDA, M. N. Polyhedral Laurent series and Brion's equalities. *International Journal of Math.*, 1 (3) (1990), 251-265.

- [M] MACDONALD, I. G. Polynomials associated with finite cell-complexes. *J. London Math. Soc. (2)*, 4 (1971), 181-192.
- [MM] McMULLEN, P. Lattice-invariant valuations on rational polytopes. *Arch. Math.*, 31 (1978), 509-516.
- [O] ODA, T. *Convex bodies and algebraic geometry (An introduction to the theory of toric varieties)*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
- [PS] PERLES, M. and C. SHEPHARD. Angle sums of convex polytopes. *Math. Scand.*, 21 (1967), 199-218.
- [R] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [S] STANLEY, R. *Enumerative combinatorics, Vol. I*. Wadsworth and Brooks/Cole, Belmont, 1986.

(Reçu le 18 février 1991)

Michel Brion

Université de Grenoble 1
Institut Fourier
UFR de Mathématiques
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
(France)