Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX
Autor: Brion, Michel
Kapitel: 3. Propriétés énumératives des polytopes convexes entiers
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59483

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3. Propriétés énumératives des polytopes convexes entiers

3.1. Comportement polynomial de fonctions de comptage

Soient P un polytope convexe entier, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de M, et ω un poids (voir 2.4). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$i_{\omega,P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) ,$$

où $nP = \{np \mid p \in P\}$.

Théorème. *La fonction* $i_{\omega,P}$ *se prolonge en une fonction polynomiale sur* $\mathbf{R}$, *de degré au plus* d.

Démonstration. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des sommets de P. Pour tout $s \in \mathscr{E}$, soit P_s le cône engendré par $-s + P$. Alors l'ensemble des sommets de nP est $n\mathscr{E}$, et on a: $(nP)_{ns} = P_s$ pour tout $s \in \mathscr{E}$. D'après le théorème 2.4, on a:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) x^m = \Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_\omega(P_s) .$$

De plus, chaque $\Phi_\omega(P_s)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de termes de la forme $x^q \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i})^{-1}$ où $n \leqslant d$. Choisissons une forme linéaire λ sur V, telle que $\lambda(m_i) \neq 0$ chaque fois que $1 - x^{m_i}$ figure au dénominateur d'un des $\Phi_\omega(P_s)$. Soit $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Il existe un unique morphisme d'algèbres $\varepsilon: \mathbf{Z}[M] \to \mathbf{R}$ tel que $\varepsilon(x^m) = \exp(t\lambda(m))$, où exp est la fonction exponentielle. Par hypothèse, ε s'étend à l'algèbre engendrée par $\mathbf{Z}[M]$ et les $\Phi_\omega(P_s)$. D'où la relation

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(tn\lambda(s)) \cdot \varepsilon(\Phi_\omega(P_s)) . \tag{8}$$

De plus, $\varepsilon(\Phi_\omega(P_s))$ est une combinaison linéaire de termes

$$\exp(t\lambda(a)) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - \exp(t\lambda(m_i))^{-1} ,$$

donc son développement en série de Laurent en t, est de la forme

$$\varepsilon(\Phi_\omega(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q(s) t^q ,$$

avec $r_s \leqslant d$. En comparant les termes constants dans les développements des deux membres de (8) en série de Laurent en t, on trouve

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} n^p ,$$

d'où le résultat. □

On note encore $i_{\omega, P}$ la fonction polynomiale ainsi définie. En général, $i_{\omega, P}(0)$ n'est pas égale à 1; sa valeur correcte sera calculée dans le corollaire 3 ci-après.

3.2. Loi de réciprocité

On conserve les notations de 3.1. Soit ω^* le poids dual de ω (voir 2.4).

Théorème. *On a l'identité suivante entre fonctions polynomiales:*

$$i_{\omega, P}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}(t) .$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème 3.1. On a

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(nP) &= \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_\omega(P_s) \\ &= (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_{\omega^*}(-P_s) \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.4. Par suite, on a

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(tn\lambda(s))\, \varepsilon(\Phi_{\omega^*}(-P_s)) . \tag{9}$$

Soit $\varepsilon(\Phi_{\omega^*}(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q$ son développement en série de Laurent. En remplaçant t par $-t$ dans (9), on obtient:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(-t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(-tn\lambda(s)) \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q .$$

D'où, en prenant le terme constant,

$$i_{\omega, P}(n) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}^*(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} (-n)^p = (-1)^d i_{\omega^*, P}(-n)$$

d'après la fin de la preuve du théorème 3.1. □

En prenant pour poids la fonction χ définie dans l'exemple 2.4.(i), on retrouve le résultat suivant (voir [E], §6):

COROLLAIRE 1. *Soient* $i_P(n) = \operatorname{card}(((nP) \cap M))$ *et* $i_P^\circ(n) = \operatorname{card}((n\mathring{P}) \cap M)$. *Alors les fonctions* i_P *et* i_P° *sont polynomiales, et on a* $i_P(-t) = (-1)^d i_P^\circ(t)$.

Lorsqu'on prend pour poids la fonction α définie dans l'exemple 2.4(ii), on a $\alpha = \alpha^*$, d'où le

COROLLAIRE 2 (voir [M], Theorem 4.8). *La fonction*

$$i_{\alpha,P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \alpha(m, nP)$$

est polynomiale, et $i_{\alpha,P}(-t) = (-1)^d i_{\alpha,P}(t)$.

Les fonctions $i_{\alpha,P}$ ont été introduites par H. Hadwiger pour caractériser l'équivalence de deux polytopes par décompositions et translations entières (voir [H], 2.2.9).

Revenons au cas général. Pour toute face F de P, l'espace affine $\langle F \rangle$ qu'elle engendre, est muni d'une mesure canonique μ: la mesure de Lebesgue normalisée de façon que la maille unité du réseau $M \cap \langle F \rangle$ soit de mesure 1.

COROLLAIRE 3. *Pour tout poids* ω, *le coefficient de* t^d *dans* $i_{\omega,P}(t)$ *est* $\mathring{\omega}\mu(P)$, *où* $\mathring{\omega} = \omega(x, P)$ *pour tout* $x \in \mathring{P}$. *Le coefficient de* t^{d-1} *dans* $i_{\omega,P}(t)$ *est*

$$\sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} (\omega(F, P) - \mathring{\omega}/2)\mu(F) .$$

Enfin, le terme constant de $i_{\omega,P}(t)$ *est* $\sum_F (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P)$.

Démonstration. On a

$$i_{\omega,P}(n) = \sum_F \omega(F, P) i_F^\circ(n) .$$

De plus, puisque

$$i_F^\circ(n) \cdot n^{-\dim(F)} = n^{-\dim(F)} \sum_{m \in \mathring{F} \cap (1/n)M} 1$$

est une somme de Riemann pour l'intégrale $\int_F d\mu$, on a

$$i_F^\circ(n) \underset{n \to \infty}{\sim} n^{\dim(F)} \mu(F) ,$$

d'où la première assertion. Montrons d'abord la deuxième assertion lorsque $\omega = \chi$. Alors

$$i_P(n) - \operatorname{card}((n\partial P) \cap M) = \operatorname{card}((nP) \cap M) - \operatorname{card}((n\partial P) \cap M)$$
$$= i_P^{\circ}(n) = (-1)^d i_P(-n) ,$$

où ∂P désigne le bord de P. Donc, si a est le coefficient de n^{d-1} dans $i_P(n)$,

$$a - \sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} \mu(F) = (-1)^d(-1)^{d-1}a ,$$

d'où $a = \sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} \mu(F)/2$. Dans le cas général, puisque

$$i_{\omega,P}(n) = \sum_F \omega(F, P) i_F^{\circ}(n) = (-1)^d \overset{\circ}{\omega} i_P(-n)$$
$$+ \sum_{F \neq P} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P) i_F(-n) ,$$

le coefficient de n^{d-1} dans $i_{\omega,P}(n)$ est

$$\overset{\circ}{\omega} a - \sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} \omega(F, P)\mu(F) .$$

Le même argument réduit la preuve de la dernière assertion au cas où $\omega = \chi$; il faut montrer que $i_P(0) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} = 1$. Mais cela résulte facilement de la preuve du théorème 3.1, et du fait que

$$\sum_{s \in \mathscr{E}} \Phi(P_s) = 1 .$$

En effet, les $\check{P}_s$ sont les cônes de dimension maximale d'une subdivision de V^* (voir 2.2), et le corollaire 2.1 s'applique. □

3.3. Le cas d'un polytope rationnel

Dans cette section, on considère un polytope convexe P dans V, rationnel par rapport au réseau M: pour tout sommet s de P, il existe un entier $n_s > 0$ tel que $n_s \cdot s \in M$. On va étendre à cette situation les résultats de 3.1 et 3.2.

Soit ω un poids; posons $i_{\omega,P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP)$. Notons $\tilde{M}$ le réseau engendré par M et les sommets de P. Soit γ le plus petit entier positif tel que $\gamma \cdot s \in M$ pour tout sommet s de P (c'est l'exposant du groupe abélien fini $\tilde{M}/M$).

Théorème. *Il existe des fonctions polynomiales* $i^{(1)}_{\omega,P}, \ldots, i^{(\gamma)}_{\omega,P}$ *sur* $\mathbf{R}$, *telles que* $i_{\omega,P}(n) = i^{(r)}_{\omega,P}(n)$ *si* $n \equiv r \pmod{\gamma}$. *De plus, on a*

$$i^{(r)}_{\omega,P}(-t) = (-1)^d i^{(\gamma-r)}_{\omega*,P}(-t)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Démonstration. Soit $\pi: \mathbf{Z}[[\tilde{M}]] \mapsto \mathbf{Z}[[M]]$ l'application définie par

$$\pi\Big(\sum_{p \in \tilde{M}} a_p x^p\Big) = \sum_{p \in M} a_p x^p .$$

C'est un morphisme de $\mathbf{Z}[M]$-modules. Soit $\tilde{S}$ le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^p, p \in \tilde{M}\backslash\{0\}$; et soit $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ engendré par $\tilde{S}^{-1}$ et $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. De l'identité

$$(1 - x^p)^{-1} = (1 - x^{\gamma p})^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\gamma - 1} x^{np} \right),$$

résulte que $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] = S^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. Par suite, π s'étend en un unique morphisme de $\mathbf{Z}[M]$-modules, noté encore $\pi: \tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] \mapsto S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On a donc, en posant

$$\tilde{\Phi}_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap \tilde{M}} \omega(m, P) x^m \quad \text{et} \quad \Phi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m :$$

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \pi(x^s \tilde{\Phi}_\omega(P_s)) .$$

De plus, puisque chaque P_s est rationnel pour le réseau M, on a: $\tilde{\Phi}(P_s) \in S_d^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. Soit $n > 0$ un entier; écrivons $n = q\gamma + r$ où q est entier, et où $1 \leqslant r \leqslant \gamma$. Alors

$$\Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \pi(x^{ns} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{q\gamma s} \pi(x^{rs} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)) .$$

Le résultat s'en déduit comme dans les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2. □

RÉFÉRENCES

[B] BRION, M. Points entiers dans les polyèdres convexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e série, 21* (1988), 653-663.

[D] DEMAZURE, M. Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e série, 3* (1970), 507-588.

[E] EHRHART, E. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. I. *J. Reine Angew Math., 226* (1967), 1-29.

[G] GODEMENT, R. *Théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1958.

[Ha] HADWIGER, H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1957.

[Hi] HIBI, T. Ehrhart polynomials of convex polytopes, *h*-vectors of simplicial complexes and non-singular projective toric varieties. Preprint, juin 1990.

[I] ISHIDA, M. N. Polyhedral Laurent series and Brion's equalities. *International Journal of Math. 1 (3)* (1990), 251-265.