Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX
Autor: Brion, Michel
Kapitel: 2.4. Fonctions caractéristiques pondérées
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59483

droite. Mais si P contient une droite, alors $\mathring{P} = m + \mathring{P}$ pour un $m \in M$, d'où $\Phi(\mathring{P}) = 0$. D'autre part, P n'a pas de sommet, donc (i) est triviale dans ce cas. $\square$

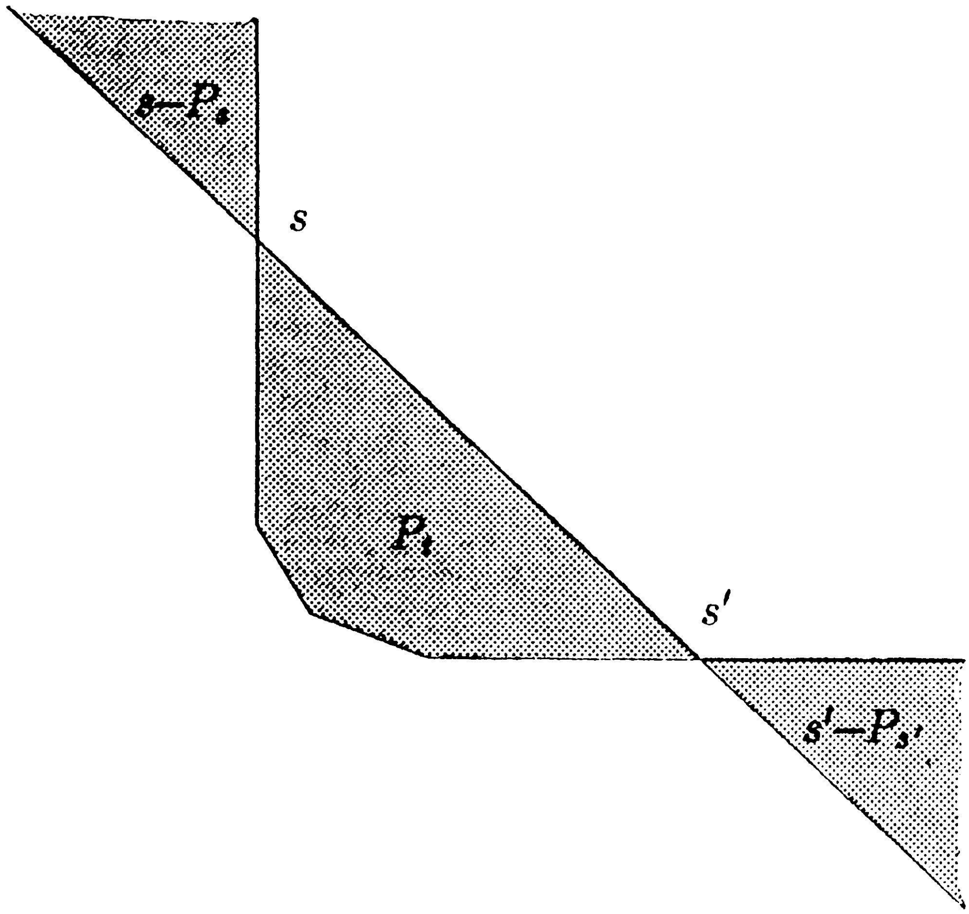

FIGURE 2

De l'identité (ii) et du corollaire 2.1, suit aussitôt le

COROLLAIRE. *Pour tout cône* C, *et toute subdivision* $(\sigma_i)_{i \in I}$ *de son cône dual, on a*

$$\Phi(\mathring{C}) = \sum_{i \in I,\ C_i \text{ saillant}} \Phi(\mathring{C}_i) ,$$

où C_i *est le cône dual de* σ_i.

2.4. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES

Définition. Un *poids* ω est la donnée, pour tout $m \in V$ et tout cône C, d'un nombre réel $\omega(m, C)$, tel que

$\omega(m, C) = 0$ si $x \notin C$;

$\omega(m, C)$ ne dépend que de la face de m dans C;

$\omega(-m, -C) = \omega(m, C)$.

Si F est une face de C, on pose $\omega(F, C) = \omega(m, C)$ où m est un point quelconque de $\mathring{F}$.

Pour tout poids ω, on définit son poids *dual* ω^* par

$$\omega^*(m, C) = \sum_{m \in F} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} \omega(F, C)$$

(somme sur toutes les faces de C qui contiennent m).

PROPOSITION. *Pour tout poids* ω, *on a:* $\omega^{**} = \omega$.

Démonstration. Soit $m \in C$; alors

$$\begin{aligned}\omega^{**}(m, C) &= \sum_{m \in F} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} \omega^*(F, C) \\ &= \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\operatorname{codim}(F) + \operatorname{codim}(F')} \omega(F', C) .\end{aligned}$$

Mais pour toute face F' de C, on a

$$(7) \qquad \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} = \begin{cases} (-1)^{\operatorname{codim}(F')} & \text{si } F' \text{ est la face de } m \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

en effet, grâce au théorème 2.3(ii):

$$\begin{aligned}\sum_{F \subset F'} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} \Phi(F) &= (-1)^d \sum_{F \subset F'} \Phi(-\mathring{F}) = (-1)^d \Phi(-F') \\ &= (-1)^{\operatorname{codim}(F')} \Phi(\mathring{F}') ,\end{aligned}$$

d'où (7) . Par suite, on a $\omega^{**}(m, C) = \omega(F', C)$ où F' est la face de m.

Exemples.

(i) Soit χ le poids défini par $\chi(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in C \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

Alors

$$\chi^*(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \mathring{C} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(ii) On suppose V euclidien. Notons $S(m, \varepsilon)$ la sphère de centre m, de rayon $\varepsilon > 0$. Pour ε assez petit, le rapport $\mu(S(m, \varepsilon) \cap C)/\mu(S(m, \varepsilon))$ (où μ est la mesure de Lebesgue sur $S(m, \varepsilon)$) ne dépend pas de ε; notons-le $\alpha(m, C)$. Ce nombre mesure l'angle sous lequel on voit C depuis la face de m. D'après un résultat de Brianchon et Gram (voir [PS]) on a

$$\alpha^* = \alpha .$$

Soit ω un poids. Pour tout polyèdre convexe P, et tout $m \in V$, on pose $\omega(m, P) = \omega(0, P_F)$ où F est la face de m dans P, et P_F est le cône formé des $t(-f+p), f \in F, t \in \mathbf{R}_+, p \in P$ (voir 2.2). On définit

$$\varphi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m \in \mathbf{R}[[M]] .$$

Alors $\varphi_\chi = \varphi$ où χ est comme dans l'exemple (i). De plus, pour tout poids ω, on a

$$\varphi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P) \varphi(\mathring{F})$$

(somme sur toutes les faces F de P). Donc $\varphi_\omega(P) \in \mathscr{L}_d(M)$ d'après 2.3. On pose $\Phi_\omega(P) = \mathscr{S}(\varphi_\omega(P))$.

THÉORÈME. (i) *Pour tout polyèdre convexe entier* P, *on a*

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \Phi_\omega(P_s) ,$$

où $\mathscr{E}$ *est l'ensemble de sommets de* P, *et* P_s *est le cône engendré par* $-s+P$.

(ii) *Pour tout cône* C, *on a*

$$\Phi_\omega(C) = (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega*}(-C) .$$

Démonstration. (i) On a, d'après le théorème 2.3,

$$\Phi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P) \Phi(\mathring{F}) = \sum_F \omega(F, P) \sum_{s \in \mathscr{E}_F} \Phi(\mathring{F}_s) ,$$

où $\mathscr{E}_F$ est l'ensemble des sommets de la face F. D'où

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \Big(\sum_{F \ni s} \omega(F, P) \Phi(\mathring{F}_s)\Big) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \Phi_\omega(P_s) .$$

(ii) On a de même

$$\begin{aligned}
\Phi_\omega(C) &= \sum_F \omega(F, C) \Phi(\mathring{F}) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \Phi(-F) \\
&= \sum_{F' \subset F} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \Phi(-\mathring{F}') \\
&= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \Big(\sum_{F \supset F'} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} \omega(F, C)\Big) \Phi(-\mathring{F}') \\
&= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \omega^*(F', C) \Phi(-\mathring{F}') \\
&= (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega*}(-C) . \quad \square
\end{aligned}$$