

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** POLYÈDRES ET RÉSEAUX  
**Autor:** Brion, Michel  
**Kapitel:** 2.4. Fonctions caractéristiques pondérées  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59483>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

droite. Mais si  $P$  contient une droite, alors  $\overset{\circ}{P} = m + \overset{\circ}{P}$  pour un  $m \in M$ , d'où  $\Phi(\overset{\circ}{P}) = 0$ . D'autre part,  $P$  n'a pas de sommet, donc (i) est triviale dans ce cas.  $\square$

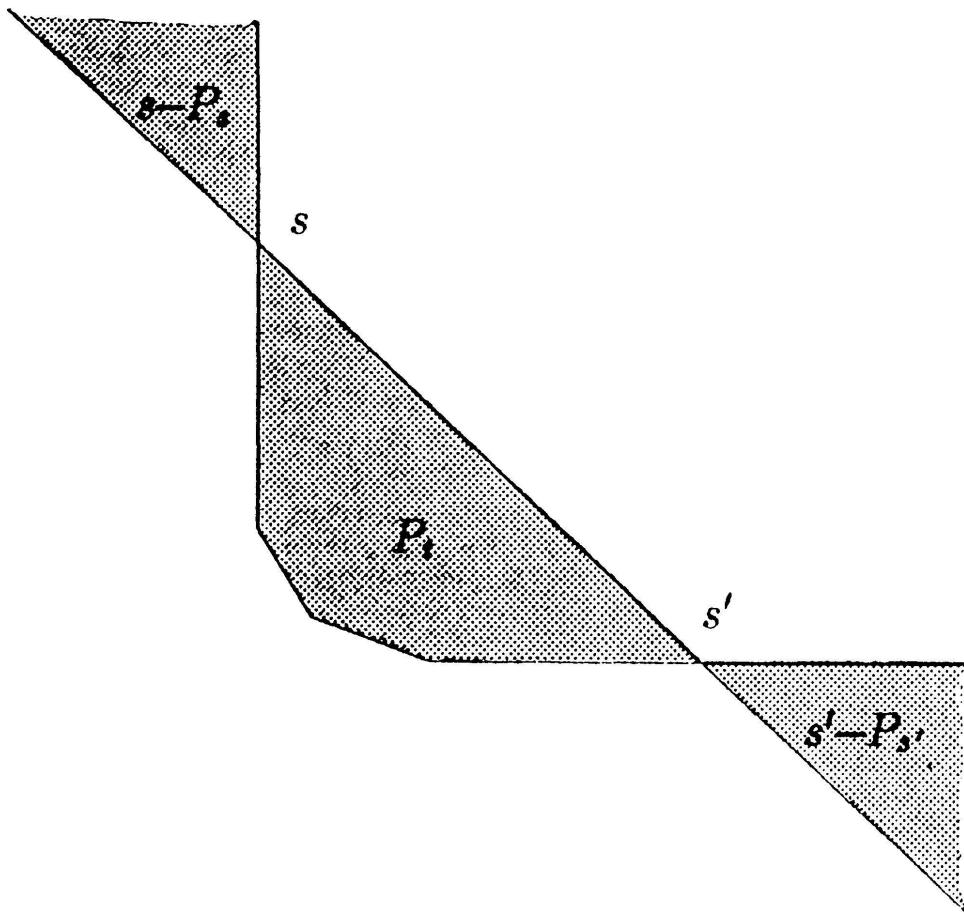


FIGURE 2

De l'identité (ii) et du corollaire 2.1, suit aussitôt le

**COROLLAIRE.** *Pour tout cône  $C$ , et toute subdivision  $(\sigma_i)_{i \in I}$  de son cône dual, on a*

$$\Phi(\overset{\circ}{C}) = \sum_{i \in I, C_i \text{ saillant}} \Phi(\overset{\circ}{C}_i),$$

où  $C_i$  est le cône dual de  $\sigma_i$ .

#### 2.4. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES

**Définition.** Un *poids*  $\omega$  est la donnée, pour tout  $m \in V$  et tout cône  $C$ , d'un nombre réel  $\omega(m, C)$ , tel que

$$\omega(m, C) = 0 \text{ si } x \notin C;$$

$\omega(m, C)$  ne dépend que de la face de  $m$  dans  $C$ ;

$$\omega(-m, -C) = \omega(m, C).$$

Si  $F$  est une face de  $C$ , on pose  $\omega(F, C) = \omega(m, C)$  où  $m$  est un point quelconque de  $\overset{\circ}{F}$ .

Pour tout poids  $\omega$ , on définit son poids *dual*  $\omega^*$  par

$$\omega^*(m, C) = \sum_{m \in F} (-1)^{\text{codim}(F)} \omega(F, C)$$

(somme sur toutes les faces de  $C$  qui contiennent  $m$ ).

**PROPOSITION.** *Pour tout poids  $\omega$ , on a:  $\omega^{**} = \omega$ .*

*Démonstration.* Soit  $m \in C$ ; alors

$$\begin{aligned} \omega^{**}(m, C) &= \sum_{m \in F} (-1)^{\text{codim}(F)} \omega^*(F, C) \\ &= \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\text{codim}(F) + \text{codim}(F')} \omega(F', C). \end{aligned}$$

Mais pour toute face  $F'$  de  $C$ , on a

$$(7) \quad \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\text{codim}(F)} = \begin{cases} (-1)^{\text{codim}(F')} & \text{si } F' \text{ est la face de } m \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

en effet, grâce au théorème 2.3(ii):

$$\begin{aligned} \sum_{F \subset F'} (-1)^{\text{codim}(F)} \Phi(F) &= (-1)^d \sum_{F \subset F'} \Phi(-\overset{\circ}{F}) = (-1)^d \Phi(-F') \\ &= (-1)^{\text{codim}(F')} \Phi(\overset{\circ}{F}'), \end{aligned}$$

d'où (7). Par suite, on a  $\omega^{**}(m, C) = \omega(F', C)$  où  $F'$  est la face de  $m$ .

*Exemples.*

$$(i) \quad \text{Soit } \chi \text{ le poids défini par } \chi(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in C \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\chi^*(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \overset{\circ}{C} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) On suppose  $V$  euclidien. Notons  $S(m, \varepsilon)$  la sphère de centre  $m$ , de rayon  $\varepsilon > 0$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, le rapport  $\mu(S(m, \varepsilon) \cap C)/\mu(S(m, \varepsilon))$  (où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $S(m, \varepsilon)$ ) ne dépend pas de  $\varepsilon$ ; notons-le  $\alpha(m, C)$ . Ce nombre mesure l'angle sous lequel on voit  $C$  depuis la face de  $m$ . D'après un résultat de Brianchon et Gram (voir [PS]) on a

$$\alpha^* = \alpha.$$

Soit  $\omega$  un poids. Pour tout polyèdre convexe  $P$ , et tout  $m \in V$ , on pose  $\omega(m, P) = \omega(0, P_F)$  où  $F$  est la face de  $m$  dans  $P$ , et  $P_F$  est le cône formé des  $t(-f + p), f \in F, t \in \mathbf{R}_+, p \in P$  (voir 2.2). On définit

$$\varphi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P)x^m \in \mathbf{R}[[M]].$$

Alors  $\varphi_\chi = \varphi$  où  $\chi$  est comme dans l'exemple (i). De plus, pour tout poids  $\omega$ , on a

$$\varphi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P)\varphi(\overset{\circ}{F})$$

(somme sur toutes les faces  $F$  de  $P$ ). Donc  $\varphi_\omega(P) \in \mathcal{L}_d(M)$  d'après 2.3. On pose  $\Phi_\omega(P) = \mathcal{S}(\varphi_\omega(P))$ .

THÉORÈME. (i) *Pour tout polyèdre convexe entier  $P$ , on a*

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \Phi_\omega(P_s),$$

où  $\mathcal{E}$  est l'ensemble de sommets de  $P$ , et  $P_s$  est le cône engendré par  $-s + P$ .

(ii) *Pour tout cône  $C$ , on a*

$$\Phi_\omega(C) = (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega^*}(-C).$$

Démonstration. (i) On a, d'après le théorème 2.3,

$$\Phi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P) \Phi(\overset{\circ}{F}) = \sum_F \omega(F, P) \sum_{s \in \mathcal{E}_F} \Phi(\overset{\circ}{F}_s),$$

où  $\mathcal{E}_F$  est l'ensemble des sommets de la face  $F$ . D'où

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \left( \sum_{F \ni s} \omega(F, P) \Phi(\overset{\circ}{F}_s) \right) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \Phi_\omega(P_s).$$

(ii) On a de même

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(C) &= \sum_F \omega(F, C) \Phi(\overset{\circ}{F}) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \Phi(-F) \\ &= \sum_{F' \subset F} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \Phi(-\overset{\circ}{F}') \\ &= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \left( \sum_{F \supset F'} (-1)^{\text{codim}(F)} \omega(F, C) \right) \Phi(-\overset{\circ}{F}') \\ &= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \omega^*(F', C) \Phi(-\overset{\circ}{F}') \\ &= (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega^*}(-C). \quad \square \end{aligned}$$