Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX
Autor: Brion, Michel
Kapitel: 2.3. Fonctions caractéristiques de polyèdres ouverts
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59483

Soit σ l'ensemble des $x \in V^*$ tels que $f(x) \neq -\infty$. C'est un cône, et $f(x) = \min_{s \in \mathscr{E}} x(s)$ pour tout $x \in \sigma$, où $\mathscr{E}$ est l'ensemble des sommets de P. Pour toute face F de P, on note P_F l'ensemble des $t(-f+p)$ où $f \in F$, $t \in \mathbf{R}_+$ et $p \in P$; c'est un cône, dont on note σ_F le cône dual. Remarquons que $P_F \cap (-P_F)$ est la direction du sous-espace affine engendré par F; en particulier, P_F est saillant si et seulement si F se réduit à un sommet. On vérifie sans peine que la famille des σ_F, F face de P, est une subdivision de σ, avec les $\sigma_s, s \in \mathscr{E}$, comme cônes de dimension maximale. De plus, $f \mid \sigma_s = s$ pour tout $s \in \mathscr{E}$, et $P = \bigcap_{s \in \mathscr{E}} (s + P_s)$ si P ne contient aucune droite.

Réciproquement, soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision d'un cône σ de V^*. Pour tout $i \in I$, soit $f_i \in M$, tel que $f_i \mid \sigma_j = f_j$ si σ_j est une face de σ_i. On suppose que la fonction f, obtenue par recollement des f_i, est *strictement convexe*, c'est-à-dire que $f(a) + f(b) < f(a+b)$ chaque fois que a, b appartiennent à des cônes distincts de la subdivision. Alors $P = \bigcap_{i \in I} (f_i + \check{\sigma}_i)$ est un polyèdre convexe entier, ayant pour sommets les f_i tels que la dimension de σ_i soit maximale, et pour fonction d'appui f. De 2.1 suit donc le

THÉORÈME. *Soient P un polyèdre convexe entier, et $\mathscr{E}$ l'ensemble de ses sommets. Alors*

$$\Phi(P) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^s \Phi(P_s)$$

où P_s est le cône engendré par $-s + P$.

2.3. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE POLYÈDRES OUVERTS

Pour tout convexe C de V, on note $\mathring{C}$ son *intérieur relatif*, c'est-à-dire l'intérieur de C dans l'espace affine qu'il engendre.

THÉORÈME. *(i) Pour tout polyèdre convexe entier P, on a: $\varphi(\mathring{P}) \in \mathscr{L}_d(M)$, et*

$$\Phi(\mathring{P}) = \sum_{s \in \mathscr{S}} x^s \Phi(\mathring{P}_s)$$

avec les notations ci-dessus.

(ii) Pour tout cône saillant C, on a: $\varphi(\mathring{C}) \in \mathscr{L}_d(M)$, et

$$\Phi(\mathring{C}) = (-1)^{\dim(C)} \Phi(-C)$$

où $-C$ est le cône opposé à C.

Démonstration. On peut supposer que P engendre V. On associe à P sa fonction d'appui f, et une subdivision $(\sigma_i)_{i \in I}$ de σ comme en 2.2. Supposons d'abord que P est borné; alors $\sigma = V^*$. Montrons que

$$\sum_{i \in I} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} \varphi(f_i - C_i) = (-1)^d \varphi(\overset{\circ}{P}) , \tag{4}$$

où on pose $C_i = \check{\sigma}_i$. Comme en 2.1, il suffit de montrer que

$$\sum_{i \in I,\, m \in f_i - C_i} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} = \begin{cases} (-1)^d & \text{si} \quad m \in \overset{\circ}{P} \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases} \tag{5}$$

On pose $B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) > f(x)\}$ et on considère les groupes de cohomologie $H^n(V^*, B(m))$. Puisque f est linéaire sur chaque σ_i, l'ensemble $\sigma_i \cap B(m)$ est vide ou convexe, d'où comme en 2.1: $H^n(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Par suite, $H^n(V^*, B(m))$ est le n-ième groupe de cohomologie du complexe

$$\cdots \to \bigoplus_{\dim(\sigma_i) = n} H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) \to \cdots . \tag{6}$$

De plus, $H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i)$ est égal à $\mathbf{Q}$ si $m \leqslant f$ sur σ_i, c'est-à-dire si $m \in f_i - C_i$; et à 0 sinon. D'autre part, on a:

$$H^n(V^*, B(m)) = H_c^{d-n}(V^* \backslash B(m))$$

par dualité d'Alexander. De plus, puisque $V^* \backslash B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) \leqslant f(x)\}$ est un cône convexe fermé de V^*, on a: $H_c^i(V^* \backslash B(m)) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$, sauf si $V^* \backslash B(m) = \{0\}$ et $i = 0$. D'où $H^n(V^*, B(m)) = 0$ sauf si $n = d$ et $m(x) > f(x)$ pour tout $x \neq 0$, c'est-à-dire si $m \in \overset{\circ}{P}$. Finalement, la caractéristique d'Euler du complexe (6) est $(-1)^d$ si $m \in \overset{\circ}{P}$, et 0 sinon, d'où (5).

Lorsque P n'est plus supposé borné, mais ne contient aucune droite, on peut trouver $x \in V^*$ tel que le polyèdre convexe $P_t = \{p \in P \mid x(p) \leqslant t\}$ soit borné, et d'intérieur non vide, pour tout t assez grand. De plus, P_t est entier pour une infinité de valeurs positives de t. En écrivant l'identité (4) pour P_t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient (4) pour P. En sommant les séries, on en déduit que

$$(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{P}) = \sum_{i \in I,\, C_i \text{ saillant}} \Phi(f_i - C_i) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^s \Phi(-P_s) .$$

En particulier, si $P = C$ est un cône saillant, alors $\mathscr{E} = \{0\}$ et $(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{C}) = \Phi(-C)$ d'où (ii). L'assertion (i) s'en déduit aussitôt, si P ne contient aucune droite. Mais si P contient une droite, alors $\mathring{P} = m + \mathring{P}$ pour un $m \in M$, d'où $\Phi(\mathring{P}) = 0$. D'autre part, P n'a pas de sommet, donc (i) est triviale dans ce cas. $\square$

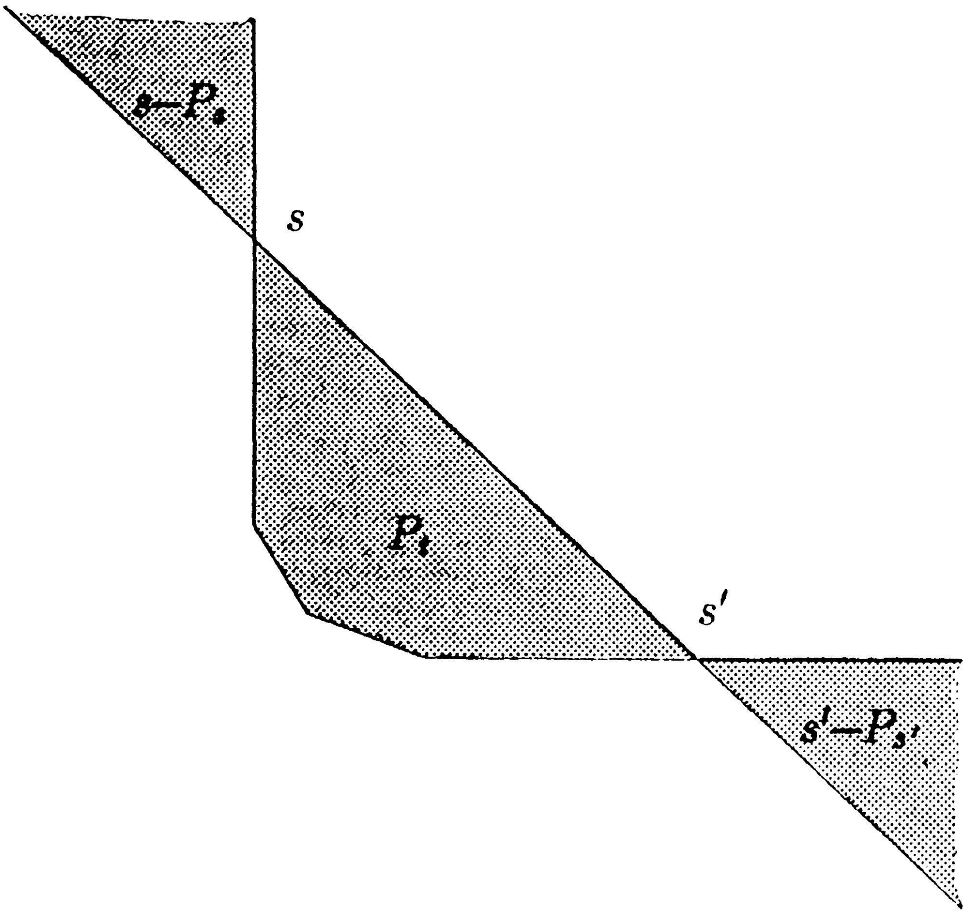

FIGURE 2

De l'identité (ii) et du corollaire 2.1, suit aussitôt le

COROLLAIRE. *Pour tout cône* C, *et toute subdivision* $(\sigma_i)_{i \in I}$ *de son cône dual, on a*

$$\Phi(\mathring{C}) = \sum_{i \in I,\ C_i \text{ saillant}} \Phi(\mathring{C}_i) \ ,$$

où C_i *est le cône dual de* σ_i.

2.4. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES

Définition. Un *poids* ω est la donnée, pour tout $m \in V$ et tout cône C, d'un nombre réel $\omega(m, C)$, tel que

$\omega(m, C) = 0$ si $x \notin C$;

$\omega(m, C)$ ne dépend que de la face de m dans C;

$\omega(-m, -C) = \omega(m, C)$.