Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX
Autor: Brion, Michel
Kapitel: 1.2. Fonctions caractéristiques de cônes et polyèdres
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59483

Soit S le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[M]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M\backslash\{0\}$. On note $S^{-1}\mathbf{Z}[M]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[M]$, formé des $s^{-1}u$ où $u \in \mathbf{Z}[M]$ et $s \in S$. Enfin, on note $\mathscr{L}(M)$ l'ensemble des $u \in \mathbf{Z}[[M]]$ tels que $S \cdot u$ rencontre $\mathbf{Z}[M]$; c'est un sous-$\mathbf{Z}[M]$-module de $\mathbf{Z}[[M]]$.

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on note S_p le sous-ensemble de S formé des produits d'au plus p éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M\backslash\{0\}$. On définit de façon évidente $S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ et $\mathscr{L}_p(M)$.

PROPOSITION. *Il existe un unique* $\mathbf{Z}[M]$*-morphisme*

$$\mathscr{S}: \mathscr{L}(M) \to S^{-1}\mathbf{Z}[M]$$

tel que $\mathscr{S}(u) = u$ *pour tout* $u \in \mathbf{Z}[M]$. *De plus,* $\mathscr{S}(\mathscr{L}_p(M)) \subset S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ *pour tout entier* $p \geqslant 0$.

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{L}_p(M)$. Choisissons $s \in S_p$ tel que $v = s \cdot u \in \mathbf{Z}[M]$, et posons $\mathscr{S}(u) = s^{-1}v \in S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On vérifie immédiatement que $\mathscr{S}(u)$ ne dépend pas du choix de s, et que $\mathscr{S}$ convient. □

On appelle $\mathscr{S}(u)$ la *somme* de la série formelle $u \in \mathscr{L}(M)$. Par exemple, pour tout $m \in M\backslash\{0\}$, on a:

$$\mathscr{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{nm}\right) = (1 - x^m)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathscr{S}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{nm}\right) = 0 .$$

1.2. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE CÔNES ET POLYÈDRES

Définitions. Une demi-droite δ de V est *entière* si son origine m est un point de M, et si $\delta\backslash\{m\}$ rencontre M. Un *cône* (convexe, rationnel, polyédral) est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, de même origine O. Le cône C est *saillant* s'il ne contient aucune droite, et *simplicial* s'il est enveloppe convexe de demi-droites dont les directions sont linéairement indépendantes.

Une *subdivision* du cône C est une famille $(C_i)_{i \in I}$ de cônes saillants telle que:

$C = \bigcup_{i \in I} C_i$;

si F est une face de C_i, alors $F = C_j$ pour un $j \in I$;

l'intersection $C_i \cap C_j$ est une face de C_i et de C_j.

La *fonction caractéristique* d'un cône C est l'élément

$$\varphi(C) = \sum_{m \in C \cap M} x^m$$

de $\mathbf{Z}[[M]]$. Remarquons que C est uniquement déterminé par $\varphi(C)$; en effet, C est l'enveloppe convexe du support de $\varphi(C)$.

PROPOSITION. *Pour tout cône C, on a: $\varphi(C) \in \mathscr{L}_d(M)$. De plus, C est saillant si et seulement si $\varphi(C) \neq 0$.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas où C est simplicial. Soient $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ses arêtes. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, le monoïde $\delta_i \cap M$ a un unique générateur m_i. Tout élément de C s'écrit de façon unique $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)m_i$ où $x_i \in \mathbf{N}, 0 \leqslant y_j < 1$ et $\sum_{j=1}^{n} y_j m_j \in C$. Par suite, si P_C désigne l'ensemble des $\sum_{j=1}^{n} y_j m_j$ avec $0 \leqslant y_j < 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, alors

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) = \sum_{m \in P_C \cap M} x^m$$

et de plus $P_C \cap M$ est fini, donc $C \in \mathscr{L}_n(M) \subset \mathscr{L}_d(M)$.

Dans le cas général, on choisit une subdivision $(C_i)_{i \in I}$ de C en cônes simpliciaux. Alors

$$\varphi(C) = \sum_i \varphi(C_i) - \sum_{i,j} \varphi(C_i \cap C_j) + \sum_{i,j,k} \varphi(C_i \cap C_j \cap C_k) - \cdots$$

est une somme alternée de fonctions caractéristiques de cônes simpliciaux, donc $\varphi(C) \in \mathscr{L}_d(M)$.

Pour la seconde assertion, supposons d'abord que C n'est pas saillant. Il existe alors $m \in M \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{R}m \subset C$. Par suite, $C = m + C$ d'où $(1 - x^m)\varphi(C) = 0$, et $\mathscr{S}(\varphi(C)) = 0$.

Réciproquement, supposons C saillant, et montrons que $\mathscr{S}(\varphi(C)) \neq 0$. Sinon, soient $m_1, \ldots, m_n$ dans $M \setminus \{0\}$ tels que

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) = 0 \,. \tag{1}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, l'ensemble des formes linéaires λ sur V, telles que $\lambda(p) > 0$ pour tout $p \in C \setminus \{0\}$, est un ouvert non vide du dual V^* de V. Par suite, on peut trouver un tel λ avec $\lambda(m_i) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Puisque

$$1 - x^{m_i} = -x^{m_i}(1 - x^{-m_i}) ,$$

on peut au besoin changer m_i en $-m_i$, et supposer que $\lambda(m_i) > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, si $\mathbf{Z}[[M]]_+$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{Z}[[M]]$ formé des séries à support dans le demi-espace ouvert $(\lambda > 0)$, on a: $\varphi(C) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$, donc

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$$

ce qui contredit (1). □

Pour tout cône C, on pose $\Phi(C) = \mathscr{S}(\varphi(C))$; c'est un élément de $S_d^{-1}\mathbf{Z}[M]$.

Définissons un *polyèdre convexe entier* P comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, et de points de M; la fonction caractéristique de P est $\varphi(P) = \sum_{m \in P \cap M} x^m$. Nous verrons en 2.2 que $\varphi(P) \in \mathscr{L}_d(M)$, et que sa somme $\mathscr{S}(\varphi(P)) = \Phi(P)$ s'exprime à l'aide des fonctions caractéristiques des cônes tangents aux sommets de P.

2. Identités entre fonctions caractéristiques

2.1 Un propriété d'additivité

Définitions. Le *cône dual* d'un cône C de V est

$$\check{C} = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(x) \geqslant 0, \ \forall x \in C\} .$$

$\check{C}$ est un cône convexe polyédral de V^*, rationnel pour le réseau dual M^* de M. De plus, la codimension de $\check{C}$ est la dimension de $C \cap (-C)$, c'est-à-dire du plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C. En particulier, C est saillant si et seulement si $\check{C}$ est de dimension d.

Soit C un cône de V, et $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision de son cône dual σ; alors $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ où C_i est le cône dual de σ_i. Pour tout $i \in I$, on se donne $f_i \in M$ tel que $f_i \mid \sigma_j = f_j$ quelle que soit la face σ_j de σ_i (on considère f_i comme fonction linéaire sur σ_i). Alors les f_i se recollent en une fonction continue sur σ, linéaire par morceaux, à valeurs entières sur $\sigma \cap M^*$. On dit que f est *convexe* si $f(a) + f(b) \leqslant f(a + b)$ pour tous a, b dans σ; cela signifie que pour tout $m \in V$, l'ensemble

$$A(m) = \{x \in \sigma \mid m(x) < f(x)\}$$

est vide ou convexe.