

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX
Autor: Brion, Michel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59483>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

POLYÈDRES ET RÉSEAUX

par Michel BRION

0. INTRODUCTION

De nombreux problèmes de combinatoire se ramènent à énumérer les points communs à un polytope convexe P , et à un réseau M qui contient tous les sommets de P ; il s'agit en particulier d'étudier l'application $i_P(n)$ qui à tout entier $n \geq 1$, associe le nombre de points communs à M et au multiple nP de P . Un résultat remarquable dû à E. Ehrhart, affirme que i_P se prolonge en une fonction polynomiale, dont la valeur en tout entier négatif $-n$ est (au signe près) le nombre de points communs à M et à $n\overset{\circ}{P}$, où $\overset{\circ}{P}$ est l'intérieur de P (voir [E], §§ 5 et 6). Ce théorème a été généralisé par I. Macdonald et d'autres, au cas où chaque point m de $M \cap (nP)$ est compté avec un certain coefficient, par exemple l'angle solide sous lequel on peut voir nP depuis m (voir [M], [MM]).

Plus récemment, sous l'impulsion de R. Stanley, ces résultats ont été redémontrés, et d'autres propriétés de la fonction i_P ont été établies, par des méthodes d'algèbre commutative. Renvoyons à [S], [H] pour plus de précisions, et aussi pour des applications intéressantes à des questions combinatoires. Dans [B], l'auteur a introduit une autre approche, qui repose sur une notion de fonction caractéristique d'un polyèdre convexe, et sur des identités entre ces fonctions. Voici de quoi il s'agit: à tout point m du réseau M , on associe un «monôme de Laurent» x^m ; si M est identifié à \mathbb{Z}^d , et m à (m_1, \dots, m_d) , c'est le monôme $x_1^{m_1} \cdots x_d^{m_d}$. La fonction caractéristique $\varphi(P)$ d'un polyèdre convexe entier P est la somme des x^m pour $m \in P \cap M$; c'est une série formelle de Laurent. On montre que $\varphi(P)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle $\Phi(P)$, ayant pour dénominateur un produit de termes de la forme $1 - x^m$, $m \in M \setminus \{0\}$. De plus, $\Phi(P)$ est la somme des fractions rationnelles attachées aux «cônes tangents» aux sommets de P , où le cône tangent en un sommet s de P est le plus petit cône convexe de sommet s , qui contient P . Le même résultat vaut en remplaçant P et ses cônes tangents par leurs intérieurs. Lorsqu'on multiplie P par un entier, ces relations se trans-

forment de façon très simple, ce qui permet de retrouver le résultat d'Ehrhart (si P est un polytope) par un passage à la limite en $x = 1$. On peut même donner une formule explicite, mais horrible, pour la fonction i_P (voir [B], Théorème 3.1).

Dans [B], les identités précédentes entre fonctions caractéristiques ont été établies grâce au dictionnaire entre polyèdres convexes entiers, et variétés toriques munies d'un fibré en droites ample (voir [O], Chapter II). Ensuite, M. Ishida a donné une démonstration élémentaire de résultats un peu plus généraux (voir [I]). Le but de ce travail est d'exposer les propriétés des fonctions caractéristiques des polyèdres convexes entiers, en suivant les idées d'Ishida, et d'en déduire des généralisations du théorème d'Ehrhart (théorèmes 3.1 et 3.2 ci-dessous). Les preuves reposent sur des variantes de la relation d'Euler entre les nombres de faces d'un polytope (lemme 2.1 ci-dessous).

Un problème intéressant mais complètement ouvert, est d'interpréter, en fonction de la géométrie du polytope convexe entier P , les coefficients de l'application polynomiale $i_P(n) = a_0 + a_1 n + \dots + a_d n^d$. On sait depuis Ehrhart que $a_0 = 1$; de plus, d est la dimension de P ; a_d est la mesure de P , et $2a_{d-1}$ est la mesure du bord de P (voir 3.2 ci-dessous). Mais la signification de a_1, \dots, a_{d-2} est inconnue.

1. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

1.1. POLYNÔMES ET SÉRIES DE LAURENT

Les notations de cette section seront utilisées dans toute la suite. Soient M un réseau dans un espace vectoriel réel V , de dimension finie d . On note $\mathbf{Z}[M]$ l'algèbre du groupe M sur \mathbf{Z} , et $(x^m)_{m \in M}$ sa base canonique: la multiplication dans $\mathbf{Z}[M]$ est définie par $x^m \cdot x^{m'} = x^{m+m'}$. Le choix d'une base (m_1, \dots, m_d) de M induit un isomorphisme de $\mathbf{Z}[M]$ avec l'anneau des polynômes de Laurent, à coefficients entiers, en les indéterminées x^{m_1}, \dots, x^{m_d} .

On note $\mathbf{Z}[[M]]$ le groupe abélien formé des séries formelles $\sum_{m \in M} a_m x^m$ à coefficients entiers. On définit sur $\mathbf{Z}[[M]]$ une structure de module sur $\mathbf{Z}[M]$, par

$$x^p \cdot \sum_{m \in M} a_m x^m = \sum_{m \in M} a_{m-p} x^m$$

(mais en général, on ne peut définir le produit de deux séries formelles). On peut voir $\mathbf{Z}[[M]]$ comme l'ensemble des séries de Laurent formelles, en d indéterminées.

Soit S le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[M]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M \setminus \{0\}$. On note $S^{-1}\mathbf{Z}[M]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[M]$, formé des $s^{-1}u$ où $u \in \mathbf{Z}[M]$ et $s \in S$. Enfin, on note $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des $u \in \mathbf{Z}[[M]]$ tels que $S \cdot u$ rencontre $\mathbf{Z}[M]$; c'est un sous- $\mathbf{Z}[M]$ -module de $\mathbf{Z}[[M]]$.

Pour tout entier $p \geq 0$, on note S_p le sous-ensemble de S formé des produits d'au plus p éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M \setminus \{0\}$. On définit de façon évidente $S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ et $\mathcal{L}_p(M)$.

PROPOSITION. *Il existe un unique $\mathbf{Z}[M]$ -morphisme*

$$\mathcal{S}: \mathcal{L}(M) \rightarrow S^{-1}\mathbf{Z}[M]$$

tel que $\mathcal{S}(u) = u$ pour tout $u \in \mathbf{Z}[M]$. De plus, $\mathcal{S}(\mathcal{L}_p(M)) \subset S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ pour tout entier $p \geq 0$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}_p(M)$. Choisissons $s \in S_p$ tel que $v = s \cdot u \in \mathbf{Z}[M]$, et posons $\mathcal{S}(u) = s^{-1}v \in S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{S}(u)$ ne dépend pas du choix de s , et que \mathcal{S} convient. \square

On appelle $\mathcal{S}(u)$ la *somme* de la série formelle $u \in \mathcal{L}(M)$. Par exemple, pour tout $m \in M \setminus \{0\}$, on a:

$$\mathcal{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{nm}\right) = (1 - x^m)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{nm}\right) = 0.$$

1.2. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE CÔNES ET POLYÈDRES

Définitions. Une demi-droite δ de V est *entière* si son origine m est un point de M , et si $\delta \setminus \{m\}$ rencontre M . Un *cône* (convexe, rationnel, polyédral) est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, de même origine O . Le cône C est *saillant* s'il ne contient aucune droite, et *simplicial* s'il est enveloppe convexe de demi-droites dont les directions sont linéairement indépendantes.

Une *subdivision* du cône C est une famille $(C_i)_{i \in I}$ de cônes saillants telle que:

$$C = \bigcup_{i \in I} C_i;$$

si F est une face de C_i , alors $F = C_j$ pour un $j \in I$;

l'intersection $C_i \cap C_j$ est une face de C_i et de C_j .

La fonction caractéristique d'un cône C est l'élément

$$\varphi(C) = \sum_{m \in C \cap M} x^m$$

de $\mathbf{Z}[[M]]$. Remarquons que C est uniquement déterminé par $\varphi(C)$; en effet, C est l'enveloppe convexe du support de $\varphi(C)$.

PROPOSITION. Pour tout cône C , on a: $\varphi(C) \in \mathcal{L}_d(M)$. De plus, C est saillant si et seulement si $\varphi(C) \neq 0$.

Démonstration. Traitons d'abord le cas où C est simplicial. Soient $\delta_1, \dots, \delta_n$ ses arêtes. Pour $1 \leq i \leq n$, le monoïde $\delta_i \cap M$ a un unique générateur m_i . Tout élément de C s'écrit de façon unique $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)m_i$ où

$x_i \in \mathbf{N}$, $0 \leq y_j < 1$ et $\sum_{j=1}^n y_j m_j \in C$. Par suite, si P_C désigne l'ensemble des

$\sum_{j=1}^n y_j m_j$ avec $0 \leq y_j < 1$ pour $1 \leq j \leq n$, alors

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^n (1 - x^{m_i}) = \sum_{m \in P_C \cap M} x^m$$

et de plus $P_C \cap M$ est fini, donc $C \in \mathcal{L}_n(M) \subset \mathcal{L}_d(M)$.

Dans le cas général, on choisit une subdivision $(C_i)_{i \in I}$ de C en cônes simpliciaux. Alors

$$\varphi(C) = \sum_i \varphi(C_i) - \sum_{i,j} \varphi(C_i \cap C_j) + \sum_{i,j,k} \varphi(C_i \cap C_j \cap C_k) - \dots$$

est une somme alternée de fonctions caractéristiques de cônes simpliciaux, donc $\varphi(C) \in \mathcal{L}_d(M)$.

Pour la seconde assertion, supposons d'abord que C n'est pas saillant. Il existe alors $m \in M \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{R}m \subset C$. Par suite, $C = m + C$ d'où $(1 - x^m)\varphi(C) = 0$, et $\mathcal{S}(\varphi(C)) = 0$.

Réciproquement, supposons C saillant, et montrons que $\mathcal{S}(\varphi(C)) \neq 0$. Sinon, soient m_1, \dots, m_n dans $M \setminus \{0\}$ tels que

$$(1) \quad \varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^n (1 - x^{m_i}) = 0.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, l'ensemble des formes linéaires λ sur V , telles que $\lambda(p) > 0$ pour tout $p \in C \setminus \{0\}$, est un ouvert non vide du dual V^* de V . Par suite, on peut trouver un tel λ avec $\lambda(m_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

Puisque

$$1 - x^{m_i} = -x^{m_i}(1 - x^{-m_i}),$$

on peut au besoin changer m_i en $-m_i$, et supposer que $\lambda(m_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors, si $\mathbf{Z}[[M]]_+$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{Z}[[M]]$ formé des séries à support dans le demi-espace ouvert ($\lambda > 0$), on a: $\varphi(C) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$, donc

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^n (1 - x^{m_i}) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$$

ce qui contredit (1). \square

Pour tout cône C , on pose $\Phi(C) = \mathcal{S}(\varphi(C))$; c'est un élément de $S_d^{-1}\mathbf{Z}[M]$.

Définissons un *polyèdre convexe entier* P comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, et de points de M ; la fonction caractéristique de P est $\varphi(P) = \sum_{m \in P \cap M} x^m$. Nous verrons en 2.2 que $\varphi(P) \in \mathcal{L}_d(M)$, et que sa somme $\mathcal{S}(\varphi(P)) = \Phi(P)$ s'exprime à l'aide des fonctions caractéristiques des cônes tangents aux sommets de P .

2. IDENTITÉS ENTRE FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

2.1 UN PROPRIÉTÉ D'ADDITIVITÉ

Définitions. Le cône dual d'un cône C de V est

$$\check{C} = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(x) \geq 0, \forall x \in C\}.$$

\check{C} est un cône convexe polyédral de V^* , rationnel pour le réseau dual M^* de M . De plus, la codimension de \check{C} est la dimension de $C \cap (-C)$, c'est-à-dire du plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C . En particulier, C est saillant si et seulement si \check{C} est de dimension d .

Soit C un cône de V , et $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision de son cône dual σ ; alors $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ où C_i est le cône dual de σ_i . Pour tout $i \in I$, on se donne $f_i \in M$ tel que $f_i|_{\sigma_j} = f_j$ quelle que soit la face σ_j de σ_i (on considère f_i comme fonction linéaire sur σ_i). Alors les f_i se recollent en une fonction continue sur σ , linéaire par morceaux, à valeurs entières sur $\sigma \cap M^*$. On dit que f est *convexe* si $f(a) + f(b) \leq f(a+b)$ pour tous a, b dans σ ; cela signifie que pour tout $m \in V$, l'ensemble

$$A(m) = \{x \in \sigma \mid m(x) < f(x)\}$$

est vide ou convexe.

LEMME. Soient C et f comme précédemment. Si f est convexe, alors pour tout $m \in V$:

$$\sum_{i \in I, m \in f_i + C_i} (-1)^{\text{codim}(\sigma_i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \bigcap_{i \in I} (f_i + C_i) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration (voisine de [D], p. 564]. On considère les groupes de cohomologie relative $H^n(\sigma, A(m))$ à coefficients rationnels. De la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H^{n-1}(A(m)) \rightarrow H^n(\sigma, A(m)) \rightarrow H^n(\sigma) \rightarrow H^n(A(m)) \rightarrow \cdots$$

et de la convexité de σ et de $A(m)$, il résulte que $H^n(\sigma, A(m)) = 0$ pour tout $n \geq 2$. De plus

$$0 \rightarrow H^0(\sigma, A(m)) \rightarrow H^0(\sigma) \xrightarrow{i} H^0(A(m)) \rightarrow H^1(\sigma, A(m)) \rightarrow 0$$

et i est surjective, donc $H^1(\sigma, A(m)) = 0$. Enfin

$$H^0(\sigma, A(m)) \neq 0 \Leftrightarrow A(m) = \emptyset \Leftrightarrow m \geq f \text{ sur } \sigma \Leftrightarrow m \in f + C$$

et

$$H^0(\sigma, A(m)) = \mathbf{Q}$$

dans ce cas. De même, $H^n(\sigma_i, A(m) \cap \sigma_i) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et tout $i \in I$. Par suite, d'après le théorème de Leray (voir [G], corollaire au théorème 5.2.4) appliqué au recouvrement fermé $\sigma = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$, le groupe $H^n(\sigma, A(m))$ est le

n -ième groupe d'homologie du complexe

$$(2) \quad \cdots \rightarrow \bigoplus_{\dim(\sigma) = n} H^0(\sigma_i, A(m) \cap \sigma_i) \rightarrow \cdots$$

Puisque $H^0(\sigma_i, A(m) \cap \sigma_i)$ est égal à \mathbf{Q} si $m \in f_i + C_i$, et à 0 sinon, l'identité cherchée s'obtient en calculant la caractéristique d'Euler du complexe (2). \square

THÉORÈME (Ishida). Soient f et C comme précédemment. Si f est convexe, alors $\varphi(\bigcap_{i \in I} (f_i + C_i)) \in \mathcal{L}_d(M)$, et

$$\Phi(\bigcap_{i \in I} (f_i + C_i)) = \sum_{i \in I, C_i \text{ saillant}} \Phi(f_i + C_i).$$

Démonstration. Montrons que

$$(3) \quad \sum_{i \in I} (-1)^{\text{codim}(\sigma_i)} \varphi(f_i + C_i) = \varphi(\bigcap_{i \in I} (f_i + C_i)).$$

En effet, pour tout $m \in M$, les coefficients de x^m dans les deux membres de (3) sont égaux d'après le lemme. Pour conclure, on remarque que $\varphi(f_i + C_i) = x^{f_i}\varphi(C_i)$, et que $\mathcal{S}(\varphi(C_i)) = 0$ si C_i n'est pas saillant, c'est-à-dire si $\dim(\sigma_i) < d$. \square

En prenant $f = 0$, on obtient le

COROLLAIRE. *Pour tout cône C , et toute subdivision $(\sigma_i)_{i \in I}$ de son cône dual, on a*

$$\Phi(C) = \sum_{i \in I, C_i \text{ saillant}} \Phi(C_i)$$

où C_i est le cône dual de σ_i .

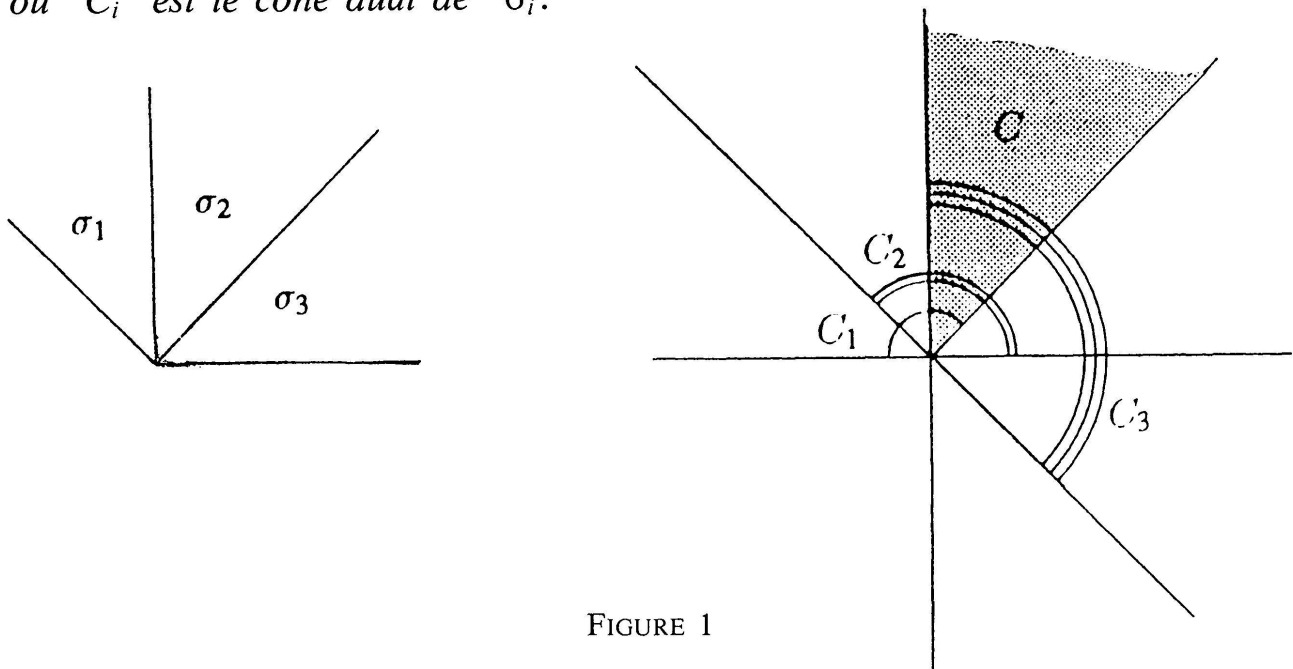


FIGURE 1

Une subdivision du cône dual

2.2. POLYÈDRES ET FONCTIONS D'APPUI

Afin de pouvoir appliquer le résultat qui précède aux fonctions caractéristiques des polyèdres, nous allons rappeler brièvement les liens entre les polyèdres convexes et leur fonction d'appui; pour plus de détails, voir [O], Appendix et [R], §§13 et 19.

Soit P un polyèdre convexe entier dans V ; nous allons lui associer une subdivision d'un cône de V^* , et une fonction convexe en 2.1. Définissons la *fonction d'appui* de P par

$$f: V^* \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbf{R}$$

$$x \mapsto \inf_{p \in P} x(p) .$$

Soit σ l'ensemble des $x \in V^*$ tels que $f(x) \neq -\infty$. C'est un cône, et $f(x) = \min_{s \in \mathcal{E}} x(s)$ pour tout $x \in \sigma$, où \mathcal{E} est l'ensemble des sommets de P . Pour toute face F de P , on note P_F l'ensemble des $t(-f + p)$ où $f \in F$, $t \in \mathbf{R}_+$ et $p \in P$; c'est un cône, dont on note σ_F le cône dual. Remarquons que $P_F \cap (-P_F)$ est la direction du sous-espace affine engendré par F ; en particulier, P_F est saillant si et seulement si F se réduit à un sommet. On vérifie sans peine que la famille des σ_F , F face de P , est une subdivision de σ , avec les σ_s , $s \in \mathcal{E}$, comme cônes de dimension maximale. De plus, $f|_{\sigma_s} = s$ pour tout $s \in \mathcal{E}$, et $P = \bigcap_{s \in \mathcal{E}} (s + P_s)$ si P ne contient aucune droite.

Réciproquement, soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision d'un cône σ de V^* . Pour tout $i \in I$, soit $f_i \in M$, tel que $f_i|_{\sigma_j} = f_j$ si σ_j est une face de σ_i . On suppose que la fonction f , obtenue par recollement des f_i , est *strictement convexe*, c'est-à-dire que $f(a) + f(b) < f(a + b)$ chaque fois que a, b appartiennent à des cônes distincts de la subdivision. Alors $P = \bigcap_{i \in I} (f_i + \check{\sigma}_i)$ est un polyèdre convexe entier, ayant pour sommets les f_i tels que la dimension de σ_i soit maximale, et pour fonction d'appui f . De 2.1 suit donc le

THÉORÈME. Soient P un polyèdre convexe entier, et \mathcal{E} l'ensemble de ses sommets. Alors

$$\Phi(P) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^s \Phi(P_s)$$

où P_s est le cône engendré par $-s + P$.

2.3. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE POLYÈDRES OUVERTS

Pour tout convexe C de V , on note $\overset{\circ}{C}$ son *intérieur relatif*, c'est-à-dire l'intérieur de C dans l'espace affine qu'il engendre.

THÉORÈME. (i) Pour tout polyèdre convexe entier P , on a: $\varphi(\overset{\circ}{P}) \in \mathcal{L}_d(M)$, et

$$\Phi(\overset{\circ}{P}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} x^s \Phi(\overset{\circ}{P}_s)$$

avec les notations ci-dessus.

(ii) Pour tout cône saillant C , on a: $\varphi(\overset{\circ}{C}) \in \mathcal{L}_d(M)$, et

$$\Phi(\overset{\circ}{C}) = (-1)^{\dim(C)} \Phi(-C)$$

où $-C$ est le cône opposé à C .

Démonstration. On peut supposer que P engendre V . On associe à P sa fonction d'appui f , et une subdivision $(\sigma_i)_{i \in I}$ de σ comme en 2.2. Supposons d'abord que P est borné; alors $\sigma = V^*$. Montrons que

$$(4) \quad \sum_{i \in I} (-1)^{\text{codim}(\sigma_i)} \varphi(f_i - C_i) = (-1)^d \varphi(\overset{\circ}{P}),$$

où on pose $C_i = \overset{\vee}{\sigma}_i$. Comme en 2.1, il suffit de montrer que

$$(5) \quad \sum_{i \in I, m \in f_i - C_i} (-1)^{\text{codim}(\sigma_i)} = \begin{cases} (-1)^d & \text{si } m \in \overset{\circ}{P} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) > f(x)\}$ et on considère les groupes de cohomologie $H^n(V^*, B(m))$. Puisque f est linéaire sur chaque σ_i , l'ensemble $\sigma_i \cap B(m)$ est vide ou convexe, d'où comme en 2.1: $H^n(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Par suite, $H^n(V^*, B(m))$ est le n -ième groupe de cohomologie du complexe

$$(6) \quad \cdots \rightarrow \bigoplus_{\dim(\sigma_i) = n} H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) \rightarrow \cdots.$$

De plus, $H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i)$ est égal à \mathbf{Q} si $m \leq f$ sur σ_i , c'est-à-dire si $m \in f_i - C_i$; et à 0 sinon. D'autre part, on a:

$$H^n(V^*, B(m)) = H_c^{d-n}(V^* \setminus B(m))$$

par dualité d'Alexander. De plus, puisque $V^* \setminus B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) \leq f(x)\}$ est un cône convexe fermé de V^* , on a: $H_c^i(V^* \setminus B(m)) = 0$ pour tout $i \geq 0$, sauf si $V^* \setminus B(m) = \{0\}$ et $i = 0$. D'où $H^n(V^*, B(m)) = 0$ sauf si $n = d$ et $m(x) > f(x)$ pour tout $x \neq 0$, c'est-à-dire si $m \in \overset{\circ}{P}$. Finalement, la caractéristique d'Euler du complexe (6) est $(-1)^d$ si $m \in \overset{\circ}{P}$, et 0 sinon, d'où (5).

Lorsque P n'est plus supposé borné, mais ne contient aucune droite, on peut trouver $x \in V^*$ tel que le polyèdre convexe $P_t = \{p \in P \mid x(p) \leq t\}$ soit borné, et d'intérieur non vide, pour tout t assez grand. De plus, P_t est entier pour une infinité de valeurs positives de t . En écrivant l'identité (4) pour P_t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient (4) pour P . En sommant les séries, on en déduit que

$$(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{P}) = \sum_{i \in I, C_i \text{ saillant}} \Phi(f_i - C_i) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^s \Phi(-P_s).$$

En particulier, si $P = C$ est un cône saillant, alors $\mathcal{E} = \{0\}$ et $(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{C}) = \Phi(-C)$ d'où (ii). L'assertion (i) s'en déduit aussitôt, si P ne contient aucune

droite. Mais si P contient une droite, alors $\overset{\circ}{P} = m + \overset{\circ}{P}$ pour un $m \in M$, d'où $\Phi(\overset{\circ}{P}) = 0$. D'autre part, P n'a pas de sommet, donc (i) est triviale dans ce cas. \square

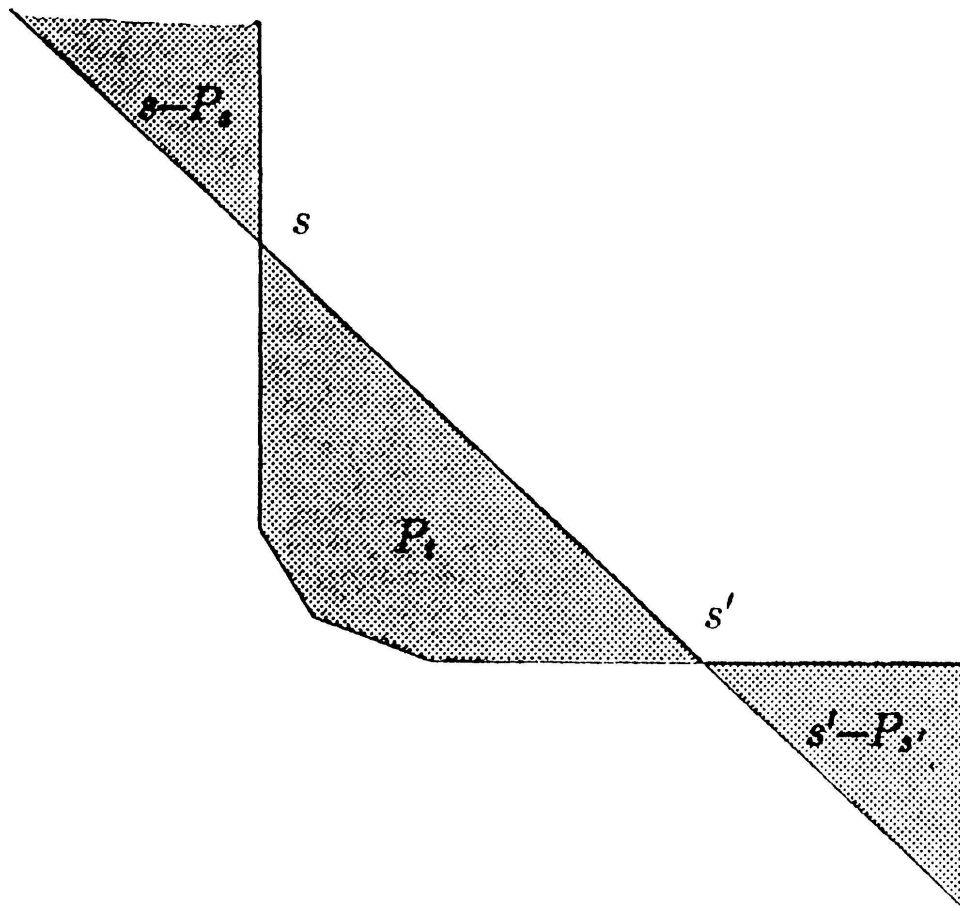


FIGURE 2

De l'identité (ii) et du corollaire 2.1, suit aussitôt le

COROLLAIRE. *Pour tout cône C , et toute subdivision $(\sigma_i)_{i \in I}$ de son cône dual, on a*

$$\Phi(\overset{\circ}{C}) = \sum_{i \in I, C_i \text{ saillant}} \Phi(\overset{\circ}{C}_i),$$

où C_i est le cône dual de σ_i .

2.4. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES

Définition. Un poids ω est la donnée, pour tout $m \in V$ et tout cône C , d'un nombre réel $\omega(m, C)$, tel que

$$\omega(m, C) = 0 \text{ si } m \notin C;$$

$$\omega(m, C) \text{ ne dépend que de la face de } m \text{ dans } C;$$

$$\omega(-m, -C) = \omega(m, C).$$

Si F est une face de C , on pose $\omega(F, C) = \omega(m, C)$ où m est un point quelconque de $\overset{\circ}{F}$.

Pour tout poids ω , on définit son poids *dual* ω^* par

$$\omega^*(m, C) = \sum_{m \in F} (-1)^{\text{codim}(F)} \omega(F, C)$$

(somme sur toutes les faces de C qui contiennent m).

PROPOSITION. Pour tout poids ω , on a: $\omega^{**} = \omega$.

Démonstration. Soit $m \in C$; alors

$$\begin{aligned} \omega^{**}(m, C) &= \sum_{m \in F} (-1)^{\text{codim}(F)} \omega^*(F, C) \\ &= \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\text{codim}(F) + \text{codim}(F')} \omega(F', C). \end{aligned}$$

Mais pour toute face F' de C , on a

$$(7) \quad \sum_{m \in F \subset F'} (-1)^{\text{codim}(F)} = \begin{cases} (-1)^{\text{codim}(F')} & \text{si } F' \text{ est la face de } m \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

en effet, grâce au théorème 2.3(ii):

$$\begin{aligned} \sum_{F \subset F'} (-1)^{\text{codim}(F)} \Phi(F) &= (-1)^d \sum_{F \subset F'} \Phi(-\overset{\circ}{F}) = (-1)^d \Phi(-F') \\ &= (-1)^{\text{codim}(F')} \Phi(\overset{\circ}{F'}), \end{aligned}$$

d'où (7). Par suite, on a $\omega^{**}(m, C) = \omega(F', C)$ où F' est la face de m .

Exemples.

$$(i) \quad \text{Soit } \chi \text{ le poids défini par } \chi(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in C \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Alors

$$\chi^*(m, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \overset{\circ}{C} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(ii) On suppose V euclidien. Notons $S(m, \varepsilon)$ la sphère de centre m , de rayon $\varepsilon > 0$. Pour ε assez petit, le rapport $\mu(S(m, \varepsilon) \cap C) / \mu(S(m, \varepsilon))$ (où μ est la mesure de Lebesgue sur $S(m, \varepsilon)$) ne dépend pas de ε ; notons-le $\alpha(m, C)$. Ce nombre mesure l'angle sous lequel on voit C depuis la face de m . D'après un résultat de Brianchon et Gram (voir [PS]) on a

$$\alpha^* = \alpha.$$

Soit ω un poids. Pour tout polyèdre convexe P , et tout $m \in V$, on pose $\omega(m, P) = \omega(0, P_F)$ où F est la face de m dans P , et P_F est le cône formé des $t(-f + p)$, $f \in F$, $t \in \mathbf{R}_+$, $p \in P$ (voir 2.2). On définit

$$\varphi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m \in \mathbf{R}[[M]] .$$

Alors $\varphi_\chi = \varphi$ où χ est comme dans l'exemple (i). De plus, pour tout poids ω , on a

$$\varphi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P) \varphi(\overset{\circ}{F})$$

(somme sur toutes les faces F de P). Donc $\varphi_\omega(P) \in \mathcal{L}_d(M)$ d'après 2.3. On pose $\Phi_\omega(P) = \mathcal{S}(\varphi_\omega(P))$.

THÉORÈME. (i) Pour tout polyèdre convexe entier P , on a

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \Phi_\omega(P_s) ,$$

où \mathcal{E} est l'ensemble de sommets de P , et P_s est le cône engendré par $-s + P$.

(ii) Pour tout cône C , on a

$$\Phi_\omega(C) = (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega*}(-C) .$$

Démonstration. (i) On a, d'après le théorème 2.3,

$$\varphi_\omega(P) = \sum_F \omega(F, P) \varphi(\overset{\circ}{F}) = \sum_F \omega(F, P) \sum_{s \in \mathcal{E}_F} \varphi(\overset{\circ}{F}_s) ,$$

où \mathcal{E}_F est l'ensemble des sommets de la face F . D'où

$$\Phi_\omega(P) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \left(\sum_{F \ni s} \omega(F, P) \varphi(\overset{\circ}{F}_s) \right) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \Phi_\omega(P_s) .$$

(ii) On a de même

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(C) &= \sum_F \omega(F, C) \varphi(\overset{\circ}{F}) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \varphi(-F) \\ &= \sum_{F' \subset F} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, C) \varphi(-\overset{\circ}{F}') \\ &= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \left(\sum_{F \supset F'} (-1)^{\operatorname{codim}(F)} \omega(F, C) \right) \varphi(-\overset{\circ}{F}') \\ &= (-1)^{\dim(C)} \sum_{F'} \omega^*(F', C) \varphi(-\overset{\circ}{F}') \\ &= (-1)^{\dim(C)} \Phi_{\omega*}(-C) . \quad \square \end{aligned}$$

3. PROPRIÉTÉS ÉNUMÉRATIVES DES POLYTOPES CONVEXES ENTIERS

3.1. COMPORTEMENT POLYNOMIAL DE FONCTIONS DE COMPTAGE

Soient P un polytope convexe entier, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de M , et ω un poids (voir 2.4). Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$i_{\omega, P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP),$$

où $nP = \{np \mid p \in P\}$.

THÉORÈME. *La fonction $i_{\omega, P}$ se prolonge en une fonction polynomiale sur \mathbf{R} , de degré au plus d .*

Démonstration. Soit \mathcal{E} l'ensemble des sommets de P . Pour tout $s \in \mathcal{E}$, soit P_s le cône engendré par $-s + P$. Alors l'ensemble des sommets de nP est $n\mathcal{E}$, et on a: $(nP)_{ns} = P_s$ pour tout $s \in \mathcal{E}$. D'après le théorème 2.4, on a:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) x^m = \Phi_{\omega}(nP) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{ns} \Phi_{\omega}(P_s).$$

De plus, chaque $\Phi_{\omega}(P_s)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de termes de la forme $x^q \prod_{i=1}^n (1 - x^{m_i})^{-1}$ où $n \leq d$. Choisissons une forme linéaire λ sur V , telle que $\lambda(m_i) \neq 0$ chaque fois que $1 - x^{m_i}$ figure au dénominateur d'un des $\Phi_{\omega}(P_s)$. Soit $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Il existe un unique morphisme d'algèbres $\varepsilon: \mathbf{Z}[M] \rightarrow \mathbf{R}$ tel que $\varepsilon(x^m) = \exp(t\lambda(m))$, où \exp est la fonction exponentielle. Par hypothèse, ε s'étend à l'algèbre engendrée par $\mathbf{Z}[M]$ et les $\Phi_{\omega}(P_s)$. D'où la relation

$$(8) \quad \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \exp(tn\lambda(s)) \cdot \varepsilon(\Phi_{\omega}(P_s)).$$

De plus, $\varepsilon(\Phi_{\omega}(P_s))$ est une combinaison linéaire de termes

$$\exp(t\lambda(a)) \cdot \prod_{i=1}^n (1 - \exp(t\lambda(m_i)))^{-1},$$

donc son développement en série de Laurent en t , est de la forme

$$\varepsilon(\Phi_{\omega}(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q(s) t^q,$$

avec $r_s \leq d$. En comparant les termes constants dans les développements des deux membres de (8) en série de Laurent en t , on trouve

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} n^p,$$

d'où le résultat. \square

On note encore $i_{\omega, P}$ la fonction polynomiale ainsi définie. En général, $i_{\omega, P}(0)$ n'est pas égale à 1; sa valeur correcte sera calculée dans le corollaire 3 ci-après.

3.2. LOI DE RÉCIPROCITÉ

On conserve les notations de 3.1. Soit ω^* le poids dual de ω (voir 2.4).

THÉORÈME. *On a l'identité suivante entre fonctions polynomiales:*

$$i_{\omega, P}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}(t).$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème 3.1. On a

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega}(nP) &= \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{ns} \Phi_{\omega}(P_s) \\ &= (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{ns} \Phi_{\omega^*}(-P_s) \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.4. Par suite, on a

$$(9) \quad \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} \exp(tn\lambda(s)) \varepsilon(\Phi_{\omega^*}(-P_s)).$$

Soit $\varepsilon(\Phi_{\omega^*}(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q$ son développement en série de Laurent.

En remplaçant t par $-t$ dans (9), on obtient:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(-t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} \exp(-tn\lambda(s)) \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q.$$

D'où, en prenant le terme constant,

$$i_{\omega, P}(n) = (-1)^d \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}^*(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} (-n)^p = (-1)^d i_{\omega^*, P}(-n)$$

d'après la fin de la preuve du théorème 3.1. \square

En prenant pour poids la fonction χ définie dans l'exemple 2.4.(i), on retrouve le résultat suivant (voir [E], §6):

COROLLAIRE 1. Soient $i_P(n) = \text{card}(((nP) \cap M))$ et $i_P^\circ(n) = \text{card}((nP^\circ) \cap M)$. Alors les fonctions i_P et i_P° sont polynomiales, et on a $i_P(-t) = (-1)^d i_P^\circ(t)$.

Lorsqu'on prend pour poids la fonction α définie dans l'exemple 2.4(ii), on a $\alpha = \alpha^*$, d'où le

COROLLAIRE 2 (voir [M], Theorem 4.8). La fonction

$$i_{\alpha,P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \alpha(m, nP)$$

est polynomiale, et $i_{\alpha,P}(-t) = (-1)^d i_{\alpha,P}(t)$.

Les fonctions $i_{\alpha,P}$ ont été introduites par H. Hadwiger pour caractériser l'équivalence de deux polytopes par décompositions et translations entières (voir [H], 2.2.9).

Revenons au cas général. Pour toute face F de P , l'espace affine $\langle F \rangle$ qu'elle engendre, est muni d'une mesure canonique μ : la mesure de Lebesgue normalisée de façon que la maille unité du réseau $M \cap \langle F \rangle$ soit de mesure 1.

COROLLAIRE 3. Pour tout poids ω , le coefficient de t^d dans $i_{\omega,P}(t)$ est $\overset{\circ}{\omega}\mu(P)$, où $\overset{\circ}{\omega} = \omega(x, P)$ pour tout $x \in P^\circ$. Le coefficient de t^{d-1} dans $i_{\omega,P}(t)$ est

$$\sum_{\text{codim}(F)=1} (\omega(F, P) - \overset{\circ}{\omega}/2) \mu(F).$$

Enfin, le terme constant de $i_{\omega,P}(t)$ est $\sum_F (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P)$.

Démonstration. On a

$$i_{\omega,P}(n) = \sum_F \omega(F, P) i_F^\circ(n).$$

De plus, puisque

$$i_F^\circ(n) \cdot n^{-\dim(F)} = n^{-\dim(F)} \sum_{m \in F^\circ \cap (1/n)M} 1$$

est une somme de Riemann pour l'intégrale $\int_F d\mu$, on a

$$i_F^\circ(n) \sim_{n \rightarrow \infty} n^{\dim(F)} \mu(F),$$

d'où la première assertion. Montrons d'abord la deuxième assertion lorsque $\omega = \chi$. Alors

$$i_P(n) - \text{card}((n\partial P) \cap M) = \text{card}((nP) \cap M) - \text{card}((n\partial P) \cap M) \\ = i_P^\circ(n) = (-1)^d i_P(-n),$$

où ∂P désigne le bord de P . Donc, si a est le coefficient de n^{d-1} dans $i_P(n)$,

$$a - \sum_{\text{codim}(F)=1} \mu(F) = (-1)^d (-1)^{d-1} a,$$

d'où $a = \sum_{\text{codim}(F)=1} \mu(F)/2$. Dans le cas général, puisque

$$i_{\omega, P}(n) = \sum_F \omega(F, P) i_F^\circ(n) = (-1)^d \overset{\circ}{\omega} i_P(-n) \\ + \sum_{F \neq P} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P) i_F(-n),$$

le coefficient de n^{d-1} dans $i_{\omega, P}(n)$ est

$$\overset{\circ}{\omega} a - \sum_{\text{codim}(F)=1} \omega(F, P) \mu(F).$$

Le même argument réduit la preuve de la dernière assertion au cas où $\omega = \chi$; il faut montrer que $i_P(0) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} = 1$. Mais cela résulte facilement de la preuve du théorème 3.1, et du fait que

$$\sum_{s \in \mathcal{C}} \Phi(P_s) = 1.$$

En effet, les \check{P}_s sont les cônes de dimension maximale d'une subdivision de V^* (voir 2.2), et le corollaire 2.1 s'applique. \square

3.3. LE CAS D'UN POLYTOPE RATIONNEL

Dans cette section, on considère un polytope convexe P dans V , rationnel par rapport au réseau M : pour tout sommet s de P , il existe un entier $n_s > 0$ tel que $n_s \cdot s \in M$. On va étendre à cette situation les résultats de 3.1 et 3.2.

Soit ω un poids; posons $i_{\omega, P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP)$. Notons \tilde{M} le réseau engendré par M et les sommets de P . Soit γ le plus petit entier positif tel que $\gamma \cdot s \in M$ pour tout sommet s de P (c'est l'exposant du groupe abélien fini \tilde{M}/M).

THÉORÈME. *Il existe des fonctions polynomiales $i_{\omega, P}^{(1)}, \dots, i_{\omega, P}^{(\gamma)}$ sur \mathbf{R} , telles que $i_{\omega, P}(n) = i_{\omega, P}^{(r)}(n)$ si $n \equiv r \pmod{\gamma}$. De plus, on a*

$$i_{\omega, P}^{(r)}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}^{(\gamma-r)}(-t)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Démonstration. Soit $\pi: \mathbf{Z}[[\tilde{M}]] \mapsto \mathbf{Z}[[M]]$ l'application définie par

$$\pi\left(\sum_{p \in \tilde{M}} a_p x^p\right) = \sum_{p \in M} a_p x^p.$$

C'est un morphisme de $\mathbf{Z}[M]$ -modules. Soit \tilde{S} le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^p, p \in \tilde{M} \setminus \{0\}$; et soit $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ engendré par \tilde{S}^{-1} et $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. De l'identité

$$(1 - x^p)^{-1} = (1 - x^{\gamma p})^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\gamma-1} x^{np} \right),$$

résulte que $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] = S^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. Par suite, π s'étend en un unique morphisme de $\mathbf{Z}[M]$ -modules, noté encore $\pi: \tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] \mapsto S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On a donc, en posant

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\omega(P) &= \sum_{m \in P \cap \tilde{M}} \omega(m, P) x^m \quad \text{et} \quad \Phi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m : \\ \Phi_\omega(P) &= \sum_{s \in \mathcal{E}} \pi(x^s \tilde{\Phi}_\omega(P_s)). \end{aligned}$$

De plus, puisque chaque P_s est rationnel pour le réseau M , on a: $\tilde{\Phi}(P_s) \in S_d^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$. Soit $n > 0$ un entier; écrivons $n = q\gamma + r$ où q est entier, et où $1 \leq r \leq \gamma$. Alors

$$\Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \pi(x^{ns} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{q\gamma s} \pi(x^{rs} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)).$$

Le résultat s'en déduit comme dans les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2. \square

RÉFÉRENCES

- [B] BRION, M. Points entiers dans les polyèdres convexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4^e série, 21 (1988), 653-663.
- [D] DEMAZURE, M. Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4^e série, 3 (1970), 507-588.
- [E] EHRHART, E. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. I. *J. Reine Angew Math.*, 226 (1967), 1-29.
- [G] GODEMENT, R. *Théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1958.
- [Ha] HADWIGER, H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1957.
- [Hi] HIBI, T. Ehrhart polynomials of convex polytopes, h -vectors of simplicial complexes and non-singular projective toric varieties. Preprint, juin 1990.
- [I] ISHIDA, M. N. Polyhedral Laurent series and Brion's equalities. *International Journal of Math.* 1 (3) (1990), 251-265.

- [M] MACDONALD, I. G. Polynomials associated with finite cell-complexes. *J. London Math. Soc.* (2), 4 (1971), 181-192.
- [MM] McMULLEN, P. Lattice-invariant valuations on rational polytopes. *Arch. Math.*, 31 (1978), 509-516.
- [O] ODA, T. *Convex bodies and algebraic geometry (An introduction to the theory of toric varieties)*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
- [PS] PERLES, M. and C. SHEPHARD. Angle sums of convex polytopes. *Math. Scand.*, 21 (1967), 199-218.
- [R] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [S] STANLEY, R. *Enumerative combinatorics, Vol. I*. Wadsworth and Brooks/Cole, Belmont, 1986.

(Reçu le 18 février 1991)

Michel Brion

Université de Grenoble 1
Institut Fourier
UFR de Mathématiques
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
(France)