

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES  
**Autor:** Hausmann, Jean-Claude  
**Kapitel:** 7. Exemples d'actions quasi linéaires  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59482>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 7. EXEMPLES D'ACTIONS QUASI LINÉAIRES

Dans ce paragraphe, nous considérerons la «donnée» suivante:

- $M^{n+1}$  est une variété riemannienne,
- $G$  est un groupe de Lie compact opérant sur  $M$  par isométries,
- $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  est une application différentiable telle que  $f(gx) = f(x)$  pour tout  $x \in M$  et  $g \in G$ .

— L'application  $f$  a un unique point critique  $p \in M$ , qui est un extremum. Le point  $p$  est donc un point fixe pour l'action de  $G$ . On choisit une isométrie  $h$  entre l'espace tangent  $T_p M$  et  $\mathbf{R}^{n+1}$  avec son produit scalaire standard. L'action induite de  $G$  sur  $T_p M$  est donc transportée par  $h$  en une action orthogonale de  $G$  sur  $\mathbf{R}^{n+1}$  que nous noterons  $\alpha$ ,

- Soit  $q \in \mathbf{R}$  une valeur régulière de  $f$ . On suppose que la variété  $f^{-1}(\{q\})$  est difféomorphe à  $S^n$ . Remarquons que  $f^{-1}(\{q\})$  est une  $G$ -variété.

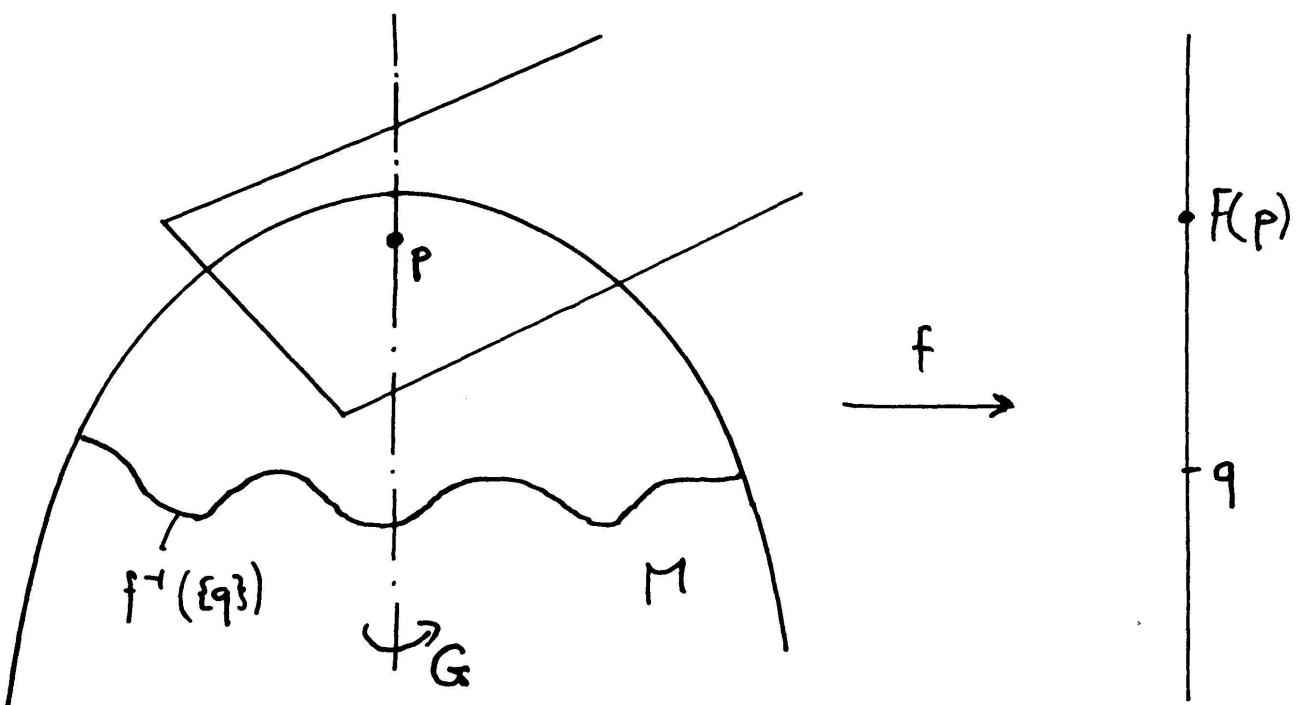


FIGURE 3

Pour une telle donnée, nous allons démontrer les trois propositions suivantes:

- (7.1) PROPOSITION. *L'action de  $G$  sur  $f^{-1}(\{q\})$  est QL associée à  $\alpha$ .*
- (7.2) PROPOSITION. *Supposons que  $p$  est un extremum non dégénéré. Alors l'action de  $G$  sur  $f^{-1}(\{q\})$  est différentiablement conjuguée à  $\alpha$ .*

(7.3) PROPOSITION Soit  $\alpha'$  une action  $QL$  libre de  $G$  sur  $S^n$  associée à l'action linéaire  $\alpha$ . Alors il existe une donnée comme ci-dessus pour laquelle l'action de  $G$  sur  $f^{-1}(\{q\})$  est différentiablement conjuguée à  $\alpha'$ .

*Preuves.* Soit  $U$  un voisinage de  $O$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  tel que  $\varphi = \exp \circ h: U \rightarrow M$  fournit une carte au voisinage de  $p$ . On supposera que  $p$  est un minimum et que  $f(p) = 0$ . Comme  $p$  est l'unique point critique de  $f$ , il existe  $q'$  tel que  $0 < q' < q$ ,  $f^{-1}(\{q'\}) \subset \varphi(U)$  et  $f^{-1}(\{q\})$  admet un difféomorphisme  $G$ -équivariant sur  $f^{-1}(\{q'\})$  (on utilise le flot du champ  $\text{grad } f / \| \text{grad } f \|$  (voir [Mi3], Theorem 3.4)). Comme  $\varphi^{-1}|_{f^{-1}(\{q\})}$  est un plongement  $G$ -équivariant de  $f^{-1}(\{q\})$  dans  $(\mathbf{R}^{n+1}, \alpha)$  cela prouve la proposition (7.1).

Si maintenant  $p$  est un minimum non-dégénéré, le lemme de Morse fournit une carte  $\psi$  telle que  $f \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ . Dans ce système de coordonnées, les variétés de niveau de  $f$  sont des sphères standards qui intersectent donc chaque rayon de  $\mathbf{R}^{n+1}$  transversalement. On en déduit que  $(f \circ \varphi)^{-1}(\{q'\})$  intersecte chaque rayon de  $\mathbf{R}^{n+1}$  transversalement, si  $q'$  est suffisamment petit. On a alors un difféomorphisme équivariant de  $(f \circ \varphi)^{-1}(\{q'\})$  sur la sphère de rayon 1 par la projection radiale. Cela démontre (7.2). Pour démontrer (7.3), on va construire la fonction  $f$  pour  $M = \mathbf{R}^{n+1}$  muni de l'action  $\alpha$ . Si  $\alpha'$  une action libre  $QL$  associée à  $\alpha$ , on a, par le point d) du théorème (3.1), un difféomorphisme  $G$ -équivariant  $g: (S^n \times \mathbf{R}, \alpha) \rightarrow (S^n \times \mathbf{R}, \alpha')$  (actions produits). Posons  $g(x, t) = (g_1(x, t), g_2(x, t))$ . Soit

$$w(x, t) = e^g 2^{(x, \log t)}.$$

On a donc un difféomorphisme  $G$ -équivariant de

$$(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, \alpha) = (S^n \times ]0, \infty[, \alpha)$$

sur  $(S^n \times ]0, \infty[, \alpha')$  pour les actions produits donné par

$$(x, t) \mapsto (g_1(x, t), w(x, t)).$$

On définit  $f: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  par:

$$f(x, t) = e^{-1/w(x, t)^2} \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Comme le difféomorphisme  $g$  est en quelque sorte «périodique» (voir sa construction dans la preuve de (3.1)), on a que toutes les dérivées partielles, de tout ordre, de  $g$  sont bornées et de plus  $t - 2 \leq g_2(x, t) \leq t + 2$ . On en déduit que

toutes les dérivées partielles de  $w(x, t)$  sont bornées. Il s'en suit que  $f$  est de classe  $C^\infty$  avec toutes les dérivées partielles s'annulant en 0. On vérifie aisément que  $f$  a les propriétés voulues, ce qui démontre (7.3).

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ba] BAK, A. The computation of surgery groups of finite groups with abelian 2-hyperelementary subgroups. *Proc. Evanston K-theory conf.* (1976). Springer Lect. Notes 551, 384-409.
- [Br] BREDON, G. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press 1972.
- [Co] COHEN, M. *A course in simple-homotopy theory*. Springer-Verlag 1973.
- [Fr] FREEDMANN, M. The topology of 4-dimensional manifolds. *Journal of Differential geometry* 17 (1982), 357-453.
- [F-M] FRIEDMANN, R. and J. MORGAN. On the diffeomorphism type of certain surfaces I. *Journal of Differential geometry* 27 (1988), 297-369.
- [Ha] HAUSMANN, J.-Cl. *Groupes de sphères d'homologie entières*. Thèse, Université de Genève, 1974.
- [Ha2] —— Sur la topologie des bras articulés. *Algebraic topology*, Poznan. Springer Lecture Notes 1474 (1989), 146-159.
- [Hs] HSIANG, W. C. and W. Y. HSIANG. Some free actions of  $S^1$  and  $S^3$  on homotopy spheres. *Quarterly J. of Math.* 15 (1964), 371-374.
- [Ke] KERVAIRE, M. Smooth homology spheres and their fundamental groups. *Trans. AMS* 144 (1969), 67-72.
- [Ke2] —— Le théorème de Barden-Mazur-Stallings. *Comm. Math. Helv.* 40 (1965), 31-42.
- [Ki] KIRBY, R. *The topology of 4-manifolds*. Springer Lect. Notes 1374 (1989).
- [Mi] MILNOR, J. Whitehead torsion. *Bull. American Math. Soc.* 72 (1966), 358-426.
- [Mi2] —— Some free action of cyclic groups on spheres. *Differentiable Analysis*, Proc. conf. Bombay (1964), Oxford Univ. Press.
- [Mi3] —— *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton Univ. Press 1965.
- [Po] POENARU, V. Le théorème du s-cobordisme. *Séminaire Bourbaki* (Fév. 1971) exposé n° 392.
- [Ro] ROTENBERG, M. Torsion invariants and finite transformation groups. *Proc. of Symp. in pure Math.*, AMS, Stanford 1976, 267-312.
- [Vi] VINBERG, E. *Linear representations of groups*. Birkhäuser 1989.

(Reçu le 13 mai 1991)

Jean-Claude Hausmann

Section de Mathématiques  
Université de Genève  
C.P. 240  
CH-1211 Genève 24 (Suisse)