Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

Autor: Hausmann, Jean-Claude

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59482

L'Enseignement Mathématique, t. 38 (1992), p. 55-70

ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

par Jean-Claude HAUSMANN

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie compact. Une représentation $\alpha: G \to O_{n+1}$ de G induit une action $G \times S^n \to S^n$. Une telle action est dite *linéaire* (ou orthogonale).

Cet article est motivé par la remarque que l'on peut se servir de α pour engendrer d'autres actions sur S^n. Pour cela, considérons un plongement $e: S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. On suppose que l'image $X = e(S^n)$ est invariante par l'action de G sur $\mathbf{R}^{n+1}$, c'est-à-dire que $GX = X$. Pour simplifier, nous supposerons également que X englobe O (c'est-à-dire que O est dans la composante relativement compacte du complémentaire de X). La figure 1 ci-dessous donne un

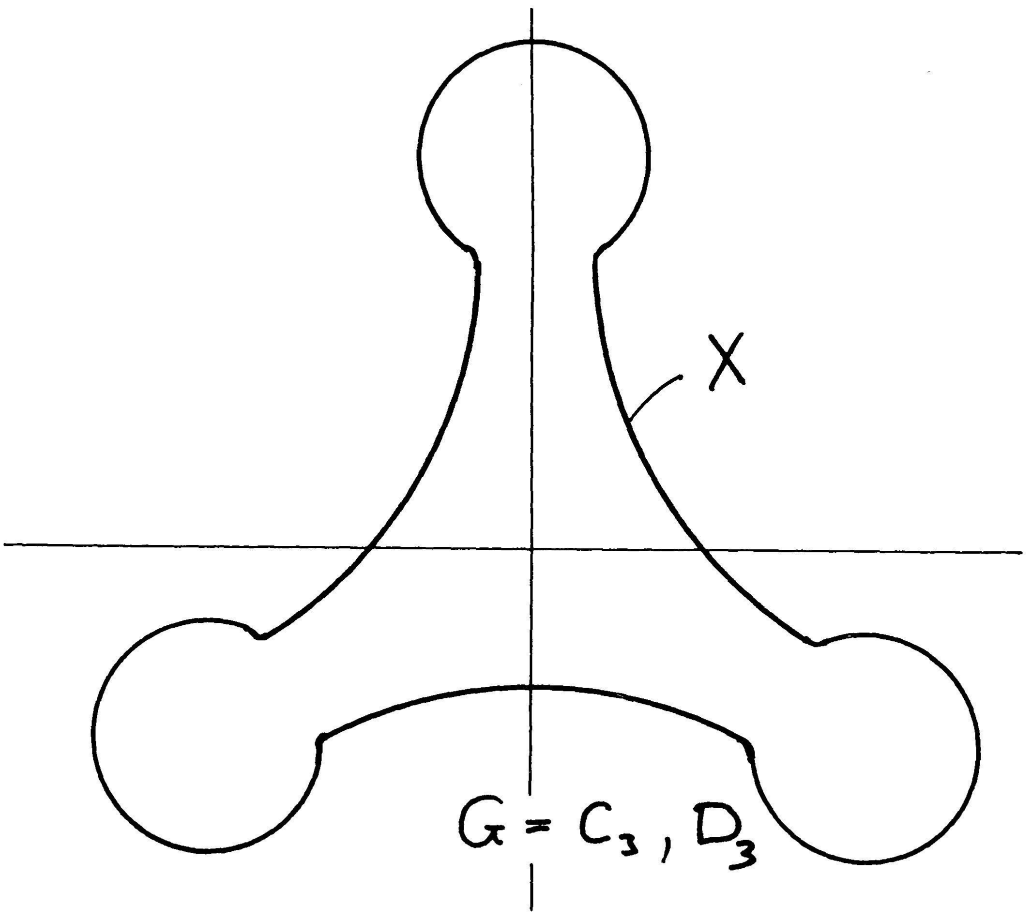

FIGURE 1

exemple pour le cas $n = 1$, $G = C_3$ (cyclique d'ordre 3) ou (D_3 (dihédral). On obtient alors une nouvelle action

$$G \times S^n \to S^n$$

$$(g,x) \mapsto g * x = e^{-1}(ge(x))$$

Une telle action sera dite *quasi-linéaire* (*QL*) (d'action linéaire associée α). Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les questions suivantes:

1) Une action *QL* est-elle toujours différentiablement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un difféomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g * x = h^{-1}gh(x)$)?)

2) Une action *QL* est-elle toujours topologiquement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un homéomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g * x = h^{-1}gh(x)$)?)

3) Toute action de G sur S^n est-elle différentiablement (ou topologiquement) conjuguée à une action *QL*?

On verra que la réponse à ces questions, pour différents n et G, est parfois positive, parfois négative et parfois ouverte et équivalente à un problème célèbre, par exemple la conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4. Il est à remarquer que ces questions, dont l'énoncé est extrêmement élémentaire, mettent en jeu, pour leur résolution, une partie importante des grandes techniques de la topologie différentielle.

Des exemples naturels d'actions *QL* sont donnés au paragraphe 7. On en trouvera aussi dans [Ha2], paragraphe 4.

Je tiens à remercier P. Vogel et M. Rothenberg pour d'intéressantes discussions.

2. G-COBORDISMES D'ACTIONS

Soit G un groupe de Lie. Nous travaillons dans la catégorie des G-variétés. Un objet de cette catégorie est une paire (V, α), où V est une variété différentiable (C^∞) et α: $G \times V \to V$ est une action différentiable. Une telle acton définit (et est déterminée par) un homomorphisme $G \to \mathrm{DIFF}(V)$, où $\mathrm{DIFF}(V)$ dénote le groupe des difféomorphismes de V. Cet homomorphisme sera également dénoté par α. De ce point de vue, un morphisme de (V_1, α_1) vers (V_2, α_2) est une application différentiable f: $V_1 \to V_2$ qui est G-équivariante, ce qui peut s'écrire $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$.

Un *G-cobordisme* entre deux G-variétés (V_1, α_1) et (V_2, α_2) est une G-variété (B, β), où (B, V_1, V_2) est un cobordisme (i.e. $\partial B = V_1 \amalg V_2$) tel que la