

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES  
D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS  
**Autor:** Guillou, L. / Marin, A.  
**Kapitel:** §1. Présentation des espaces et énoncé du théorème  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59492>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

lier une approche du calcul de la caractéristique d'Euler de  $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ . D'autre part, K. Walker, dans [W], a défini, pour toute sphère d'homologie entière (et même rationnelle!), une structure complexe sur l'espace tangent  $T\hat{R}$  pour laquelle  $T\hat{Q}_1$  et  $T\hat{Q}_2$  sont totalement réels, ceci permet de justifier l'intervention de la caractéristique d'Euler de chaque composante connexe de  $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$  dans l'expression de l'invariant de Casson de  $\Sigma$ ; il pourrait être intéressant de comprendre pourquoi les caractéristiques d'Euler de toutes les composantes apparaissent avec le même signe...

*Remarque.* Le calcul effectué ci-dessous et la formule de chirurgie de Casson 1.3.3 suffisent pour calculer l'invariant de Casson de toutes les sphères d'homologie entière fibrées de Seifert (voir [FMS] et [NW]). En fait, la généralisation par K. Walker de l'invariant de Casson et de la formule de chirurgie 1.3.3 ([W]) permettent un calcul beaucoup plus simple de ce nouvel invariant généralisé pour toutes les sphères d'homologie rationnelle fibrées de Seifert (voir [L]).

Je remercie M. Boileau, qui m'a décrit le scindement de Heegaard du paragraphe 2, L. Guillou, A. Marin, qui m'a suggéré le calcul du paragraphe 3.A, et P. Vogel.

§1. PRÉSENTATION DES ESPACES ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME

*Notations.* Dans cet appendice,  $a_1, a_2$  et  $a_3$  désigneront trois entiers positifs deux à deux premiers entre eux.

On note  $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$  la sphère de Brieskorn qui admet les deux présentations de chirurgie équivalentes (voir [Rf] chapitre 9 §G):

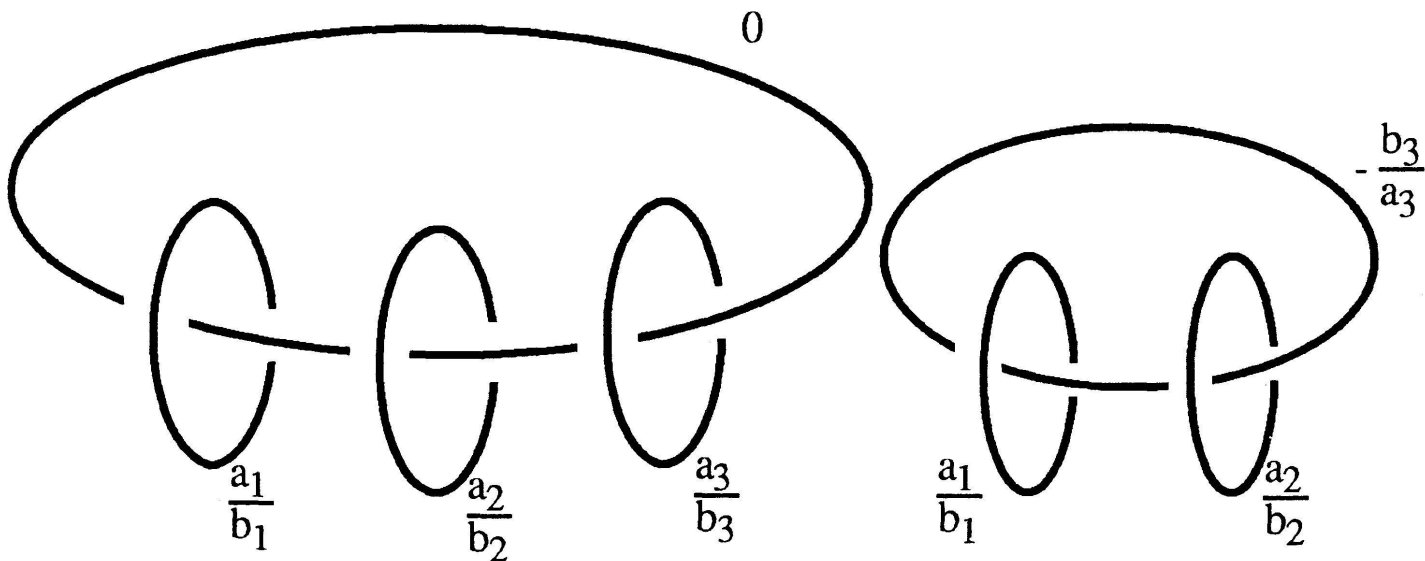


FIGURE 1

FIGURE 2

où  $b_1, b_2$  et  $b_3$  sont trois entiers qui vérifient

$$(E): b_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 = 1.$$

*Remarque.* On vérifie aisément que la variété ainsi présentée est indépendante du choix du triplet d'entiers  $(b_1, b_2, b_3)$  qui vérifie  $(E)$  (on peut, par exemple, choisir arbitrairement,  $b_1$  parmi les inverses modulo  $a_1$  de  $a_2 a_3$ , et  $b_2$  parmi les inverses modulo  $a_2$  de  $a_1 a_3$ ,  $b_3$  est alors l'unique inverse modulo  $a_3$  de  $a_1 a_2$  tel que  $(E)$  soit vérifiée.)

Les fibrés de Seifert à trois fibres exceptionnelles, sphères d'homologie entière, s'écrivent tous sous la forme  $\pm \Sigma(a_1, a_2, a_3)$  avec trois entiers  $a_1, a_2, a_3$  premiers entre eux (voir [Sf]). La relation  $\lambda(-M) = -\lambda(M)$  nous permet de ne calculer que l'invariant de Casson de  $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ .

Si on note  $\tau(a_1, a_2, a_3)$  le nombre de points à coordonnées entières intérieurs au tétraèdre de  $\mathbf{R}^3$ ,  $T(a_1, a_2, a_3)$ , de sommets  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, a_2, a_3)$ ,  $(a_1, 0, a_3)$  et  $(a_1, a_2, 0)$ , on a le résultat:

C.1. THÉORÈME. *L'invariant de Casson de  $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$  est égal à*  

$$-\left(\frac{1}{8}\right) \tau(a_1, a_2, a_3).$$

La fonction  $\tau(., ., .)$  est l'opposée de la fonction  $t(., ., .)$  dite de Brieskorn décrite dans [HZ], on peut l'exprimer à l'aide des formules qui suivent:

$$\begin{aligned} \text{C.2.} \quad \tau(a_1, a_2, a_3) &= \sum_{k=1}^3 (-1)^k \# \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3 \cap ]0, a_1[ \\ &\quad \times ]0, a_2[ \times ]0, a_3[ \mid (k-1) < \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} < k \} \end{aligned}$$

(F. Hirzebruch et D. Zagier expriment la fonction de Brieskorn  $t(a_1, a_2, a_3)$  sous (l'opposée de) cette forme dans [HZ].)

$$\begin{aligned} \text{C.3.} \quad \tau(a_1, a_2, a_3) &= 4[s(a_1 a_2, a_3) + s(a_3 a_1, a_2) + s(a_2 a_3, a_1)] \\ &\quad + \frac{a_1 a_2 a_3}{3} \left( 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} \right) - \frac{1}{3a_1 a_2 a_3} + 1 \end{aligned}$$

où  $s$  désigne la somme de Dedekind:

$$s(q, p) = \sum_{i=1}^{|p|} \left( \left( \frac{i}{p} \right) \right) \left( \left( \frac{qi}{p} \right) \right) \text{ pour } p, q \in \mathbf{Z} \text{ avec } ((x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbf{Z} \\ x - E(x) - \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $E(x)$  est la partie entière de  $x$ .