Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS

Autor: Guillou, L. / Marin, A.

Kapitel: §1. Présentation des espaces et énoncé du théorème

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59492

lier une approche du calcul de la caractéristique d'Euler de $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$. D'autre part, K. Walker, dans [W], a défini, pour toute sphère d'homologie entière (et même rationnelle!), une structure complexe sur l'espace tangent $T\hat{R}$ pour laquelle $T\hat{Q}_1$ et $T\hat{Q}_2$ sont totalement réels, ceci permet de justifier l'intervention de la caractéristique d'Euler de chaque composante connexe de $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ dans l'expression de l'invariant de Casson de Σ; il pourrait être intéressant de comprendre pourquoi les caractéristiques d'Euler de toutes les composantes apparaisent avec le même signe...

Remarque. Le calcul effectué ci-dessous et la formule de chirurgie de Casson 1.3.3 suffisent pour calculer l'invariant de Casson de toutes les sphères d'homologie entière fibrées de Seifert (voir [FMS] et [NW]). En fait, la généralisation par K. Walker de l'invariant de Casson et de la formule de chirurgie I.3.3 ([W]) permettent un calcul beaucoup plus simple de ce nouvel invariant généralisé pour toutes les sphères d'homologie rationnelle fibrées de Seifert (voir [L]).

Je remercie M. Boileau, qui m'a décrit le scindement de Heegaard du paragraphe 2, L. Guillou, A. Marin, qui m'a suggéré le calcul du paragraphe 3.A, et P. Vogel.

§1. Présentation des espaces et énoncé du théorème

Notations. Dans cet appendice, a_1, a_2 et a_3 désigneront trois entiers positifs deux à deux premiers entre eux.

On note $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ la sphère de Brieskorn qui admet les deux présentations de chirurgie équivalentes (voir [Rf] chapitre 9 §G):

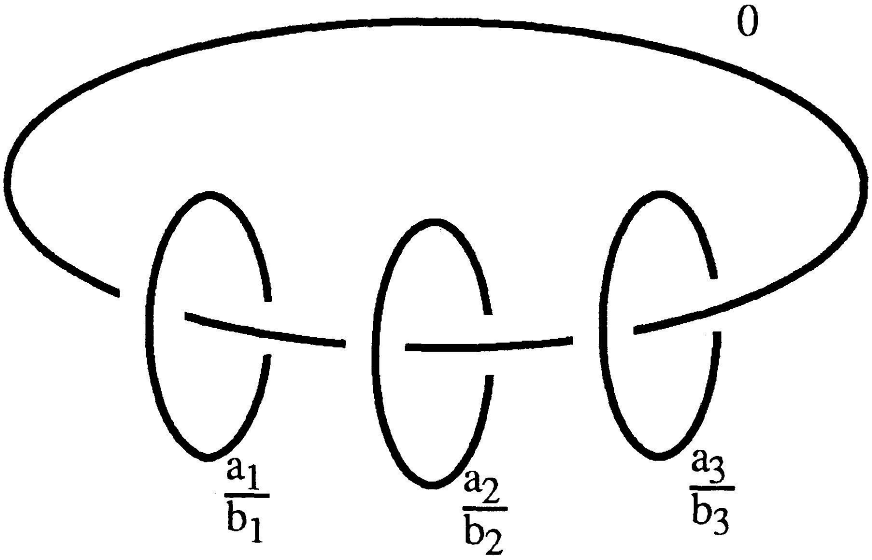

FIGURE 1

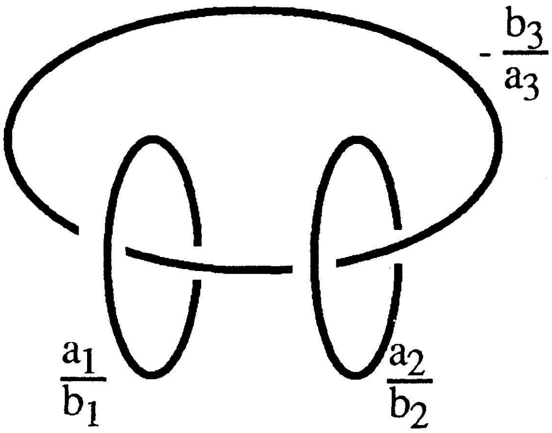

FIGURE 2

où b_1, b_2 et b_3 sont trois entiers qui vérifient

$$(E): b_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 = 1 .$$

Remarque. On vérifie aisément que la variété ainsi présentée est indépendante du choix du triplet d'entiers (b_1, b_2, b_3) qui vérifie (E) (on peut, par exemple, choisir arbitrairement, b_1 parmi les inverses modulo a_1 de $a_2 a_3$, et b_2 parmi les inverses modulo a_2 de $a_1 a_3$, b_3 est alors l'unique inverse modulo a_3 de $a_1 a_2$ tel que (E) soit vérifiée.)

Les fibrés de Seifert à trois fibres exceptionnelles, sphères d'homologie entière, s'écrivent tous sous la forme $\pm \Sigma(a_1, a_2, a_3)$ avec trois entiers a_1, a_2, a_3 premiers entre eux (voir [Sf]). La relation $\lambda(-M) = -\lambda(M)$ nous permet de ne calculer que l'invariant de Casson de $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$.

Si on note $\tau(a_1, a_2, a_3)$ le nombre de points à coordonnées entières intérieurs au tétraèdre de $\mathbf{R}^3$, $T(a_1, a_2, a_3)$, de sommets $(0, 0, 0)$, $(0, a_2, a_3)$, $(a_1, 0, a_3)$ et $(a_1, a_2, 0)$, on a le résultat:

C.1. THÉORÈME. *L'invariant de Casson de* $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ *est égal à* $-\left(\frac{1}{8}\right)\tau(a_1, a_2, a_3)$.

La fonction $\tau(.,.,.)$ est l'opposée de la fonction $t(.,.,.)$ dite de Brieskorn décrite dans [HZ], on peut l'exprimer à l'aide des formules qui suivent:

C.2. $$\tau(a_1, a_2, a_3) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^k \, \# \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3 \cap]0, a_1[\times]0, a_2[\times]0, a_3[\mid (k-1) < \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} < k\}$$

(F. Hirzebruch et D. Zagier expriment la fonction de Brieskorn $t(a_1, a_2, a_3)$ sous (l'opposée de) cette forme dans [HZ].)

C.3. $$\tau(a_1, a_2, a_3) = 4[s(a_1 a_2, a_3) + s(a_3 a_1, a_2) + s(a_2 a_3, a_1)] + \frac{a_1 a_2 a_3}{3}\left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2}\right) - \frac{1}{3 a_1 a_2 a_3} + 1$$

où s désigne la somme de Dedekind:

$$s(q, p) = \sum_{i=1}^{|p|} \left(\left(\frac{i}{p}\right)\right) \left(\left(\frac{qi}{p}\right)\right) \text{ pour } p, q \in \mathbf{Z} \text{ avec } ((x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbf{Z} \\ x - E(x) - \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $E(x)$ est la partie entière de x.