Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS

Autor: Lescop, Christine

Anhang: Appendice C Un calcul élémentaire de l'invariant de Casson des sphères d'homologie entière fibrées de Seifert à trois fibres exceptionnelles

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59492

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

APPENDICE C

par Christine LESCOP

UN CALCUL ÉLÉMENTAIRE DE L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES D'HOMOLOGIE ENTIÈRE FIBRÉES DE SEIFERT À TROIS FIBRES EXCEPTIONNELLES

§0. INTRODUCTION

Le but de cet appendice est de présenter un calcul direct (à partir de la construction de la partie 3.B) de l'invariant de Casson des fibrés de Seifert à 3 fibres exceptionnelles, sphères d'homologie entière.

L'ensemble des classes de représentations irréductibles du groupe fondamental de ces fibrés a un cardinal fini calculé, géométriquement au paragraphe C.3.A, et différemment par S. Boyer et D. Lines dans l'appendice B de [BL].

Avec les notations de 3.B (en supposant arrêtés les différents choix), l'étude du voisinage de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ dans $\hat{R}$, faite au paragraphe C.3.B, montre que, dans ce cas, les espaces $\hat{Q}_1$ et $\hat{Q}_2$ se coupent transversalement dans $\hat{R}$ et toujours avec le même signe; l'invariant de Casson d'une telle sphère d'homologie est alors, au signe près, la moitié du cardinal de l'ensemble des classes de représentations irréductibles de son groupe fondamental.

On retrouve ainsi, pour le cas des fibrés à trois fibres exceptionnelles, le résultat que R. Fintushel et R. Stern ont démontré à l'aide de l'homologie de Floer dans [FS]:

«*L'invariant de Casson d'un fibré de Seifert* Σ, *sphère d'homologie entière, est égal, au signe près, à la moitié de la caractéristique d'Euler de* $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$.»

Pour un fibré de Seifert Σ, sphère d'homologie entière, $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ est une réunion disjointe de variétés différentiables de dimension paire. P. Kirk et E. Klassen étudient en détails $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ dans [KK] où ils donnent en particu-

lier une approche du calcul de la caractéristique d'Euler de $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$. D'autre part, K. Walker, dans [W], a défini, pour toute sphère d'homologie entière (et même rationnelle!), une structure complexe sur l'espace tangent $T\hat{R}$ pour laquelle $T\hat{Q}_1$ et $T\hat{Q}_2$ sont totalement réels, ceci permet de justifier l'intervention de la caractéristique d'Euler de chaque composante connexe de $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ dans l'expression de l'invariant de Casson de Σ; il pourrait être intéressant de comprendre pourquoi les caractéristiques d'Euler de toutes les composantes apparaisent avec le même signe...

Remarque. Le calcul effectué ci-dessous et la formule de chirurgie de Casson 1.3.3 suffisent pour calculer l'invariant de Casson de toutes les sphères d'homologie entière fibrées de Seifert (voir [FMS] et [NW]). En fait, la généralisation par K. Walker de l'invariant de Casson et de la formule de chirurgie I.3.3 ([W]) permettent un calcul beaucoup plus simple de ce nouvel invariant généralisé pour toutes les sphères d'homologie rationnelle fibrées de Seifert (voir [L]).

Je remercie M. Boileau, qui m'a décrit le scindement de Heegaard du paragraphe 2, L. Guillou, A. Marin, qui m'a suggéré le calcul du paragraphe 3.A, et P. Vogel.

§ 1. Présentation des espaces et énoncé du théorème

Notations. Dans cet appendice, a_1, a_2 et a_3 désigneront trois entiers positifs deux à deux premiers entre eux.

On note $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ la sphère de Brieskorn qui admet les deux présentations de chirurgie équivalentes (voir [Rf] chapitre 9 § G):

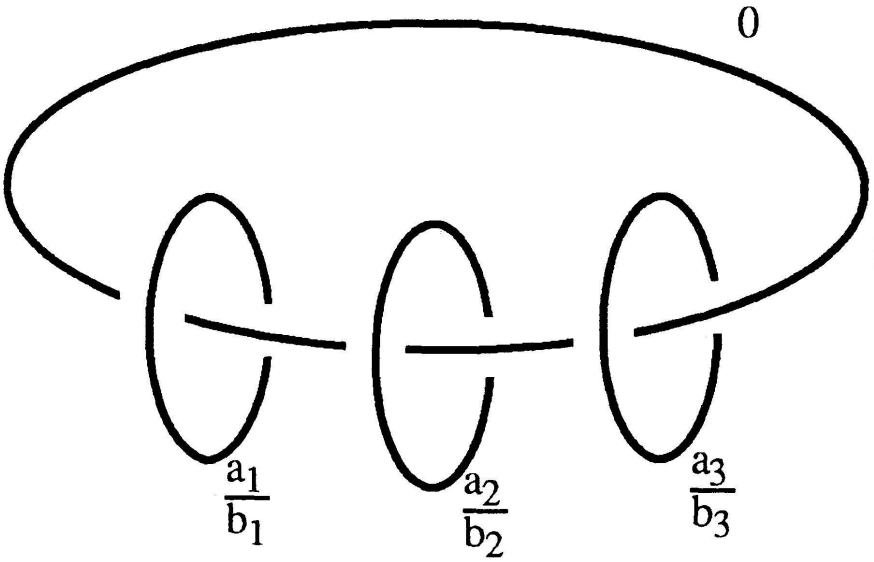

FIGURE 1

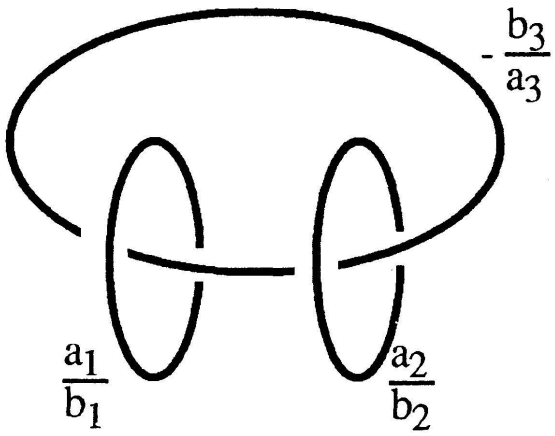

FIGURE 2

où b_1, b_2 et b_3 sont trois entiers qui vérifient

$$(E): b_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 = 1 .$$

Remarque. On vérifie aisément que la variété ainsi présentée est indépendante du choix du triplet d'entiers (b_1, b_2, b_3) qui vérifie (E) (on peut, par exemple, choisir arbitrairement, b_1 parmi les inverses modulo a_1 de $a_2 a_3$, et b_2 parmi les inverses modulo a_2 de $a_1 a_3$, b_3 est alors l'unique inverse modulo a_3 de $a_1 a_2$ tel que (E) soit vérifiée.)

Les fibrés de Seifert à trois fibres exceptionnelles, sphères d'homologie entière, s'écrivent tous sous la forme $\pm \Sigma(a_1, a_2, a_3)$ avec trois entiers a_1, a_2, a_3 premiers entre eux (voir [Sf]). La relation $\lambda(-M) = -\lambda(M)$ nous permet de ne calculer que l'invariant de Casson de $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$.

Si on note $\tau(a_1, a_2, a_3)$ le nombre de points à coordonnées entières intérieurs au tétraèdre de $\mathbf{R}^3$, $T(a_1, a_2, a_3)$, de sommets $(0, 0, 0)$, $(0, a_2, a_3)$, $(a_1, 0, a_3)$ et $(a_1, a_2, 0)$, on a le résultat:

C.1. THÉORÈME. *L'invariant de Casson de* $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ *est égal à* $-\left(\frac{1}{8}\right) \tau(a_1, a_2, a_3)$.

La fonction $\tau(.,.,.)$ est l'opposée de la fonction $t(.,.,.)$ dite de Brieskorn décrite dans [HZ], on peut l'exprimer à l'aide des formules qui suivent:

C.2.
$$\tau(a_1, a_2, a_3) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^k \# \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3 \cap]0, a_1[\times]0, a_2[\times]0, a_3[\mid (k-1) < \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} < k\}$$

(F. Hirzebruch et D. Zagier expriment la fonction de Brieskorn $t(a_1, a_2, a_3)$ sous (l'opposée de) cette forme dans [HZ].)

C.3.
$$\tau(a_1, a_2, a_3) = 4[s(a_1 a_2, a_3) + s(a_3 a_1, a_2) + s(a_2 a_3, a_1)] + \frac{a_1 a_2 a_3}{3}\left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2}\right) - \frac{1}{3 a_1 a_2 a_3} + 1$$

où s désigne la somme de Dedekind:

$$s(q, p) = \sum_{i=1}^{|p|} \left(\left(\frac{i}{p}\right)\right) \left(\left(\frac{qi}{p}\right)\right) \text{ pour } p, q \in \mathbf{Z} \text{ avec } ((x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbf{Z} \\ x - E(x) - \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $E(x)$ est la partie entière de x.

§2. Scindement de Heegaard de $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$

2.A. Description géométrique

On considère la présentation de chirurgie de $\Sigma = \Sigma(a_1, a_2, a_3)$ indiquée par la figure 2:

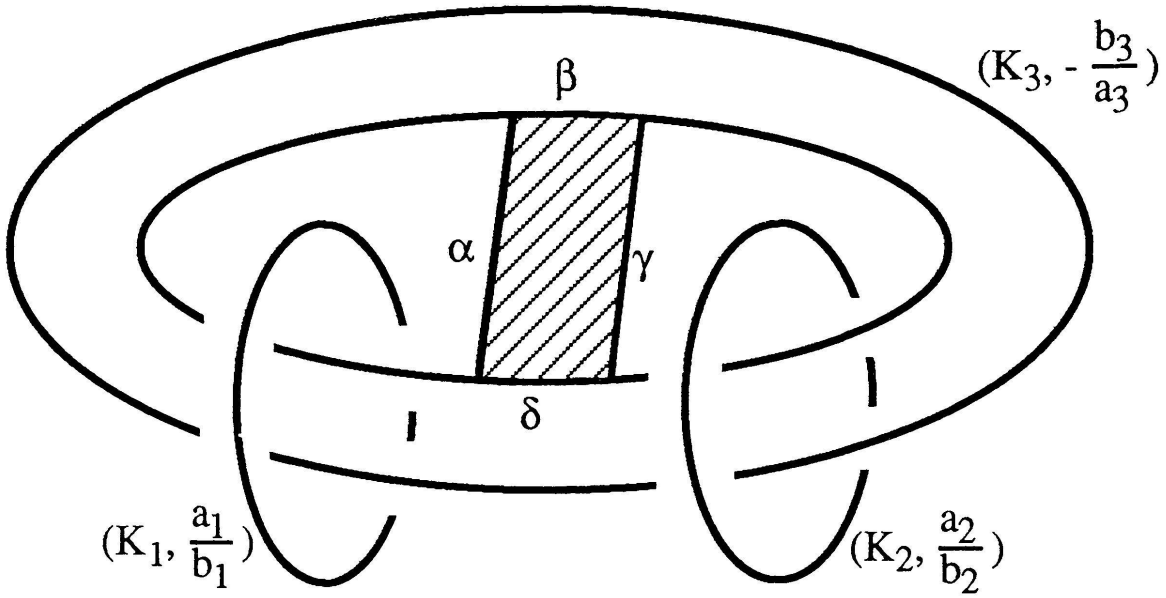

Figure 3

Notations. Considérons la figure 3. On note K_1, K_2, K_3 les composantes de l'entrelacs de la figure 2.

On décompose le méridien de K_3 en $I \underset{\partial I = \partial I'}{\amalg} I'$ où I et I' sont des intervalles d'intérieurs disjoints.

α, β, γ et δ sont les arêtes du carré hachuré C. (Situé dans le plan de la figure 3: α et γ sont des intervalles sur les méridiens de K_1 et K_2 respectivement et β et δ des intervalles sur le parallèle planaire à K_3.)

Pour $i = 1, 2, 3$, T_i désigne le tore plein recollé sur le bord du voisinage tubulaire de K_i lors de la chirurgie prescrite par le diagramme.
Soit W_1 et W_2 les deux corps en anses suivants:

$$W_1 = (T_1 \amalg T_2) \underset{I \times (\alpha \amalg \gamma)}{\cup} I \times C, \qquad W_2 = T_3 \underset{I' \times (\beta \amalg \delta)}{\cup} I' \times C$$

et F le bord commun à W_1 et à W_2 (voir fig. 4): $W_1 \underset{F}{\cup} W_2$ est un scindement de Heegaard de $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$.

Remarque. Si on utilise la terminologie de Seifert, le méridien de K_3 est une fibre ordinaire, les tores T_i sont des voisinages tubulaires des fibres

exceptionnelles et le scindement de Heegaard est réalisé en prenant pour W_1, une somme connexe le long des bords des voisinages de deux fibres exceptionnelles et pour W_2 l'adhérence du complémentaire de W_1.

2.B. Description des groupes fondamentaux associés

$\pi_1(F_*)$ est le groupe libre à quatre générateurs $\mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2$ décrits par la figure 4. Le bord orienté δ de F_* s'écrit[1]) $[\lambda_1^{-1}, \mu_1]\,[\mu_2^{-1}, \lambda_2^{-1}]$ dans cette base de $\pi_1(F_*)$. On en déduit la présentation de $\pi_1(F)$ par générateurs et relations: $\pi_1(F) = \langle \mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2 \mid \delta \rangle$.

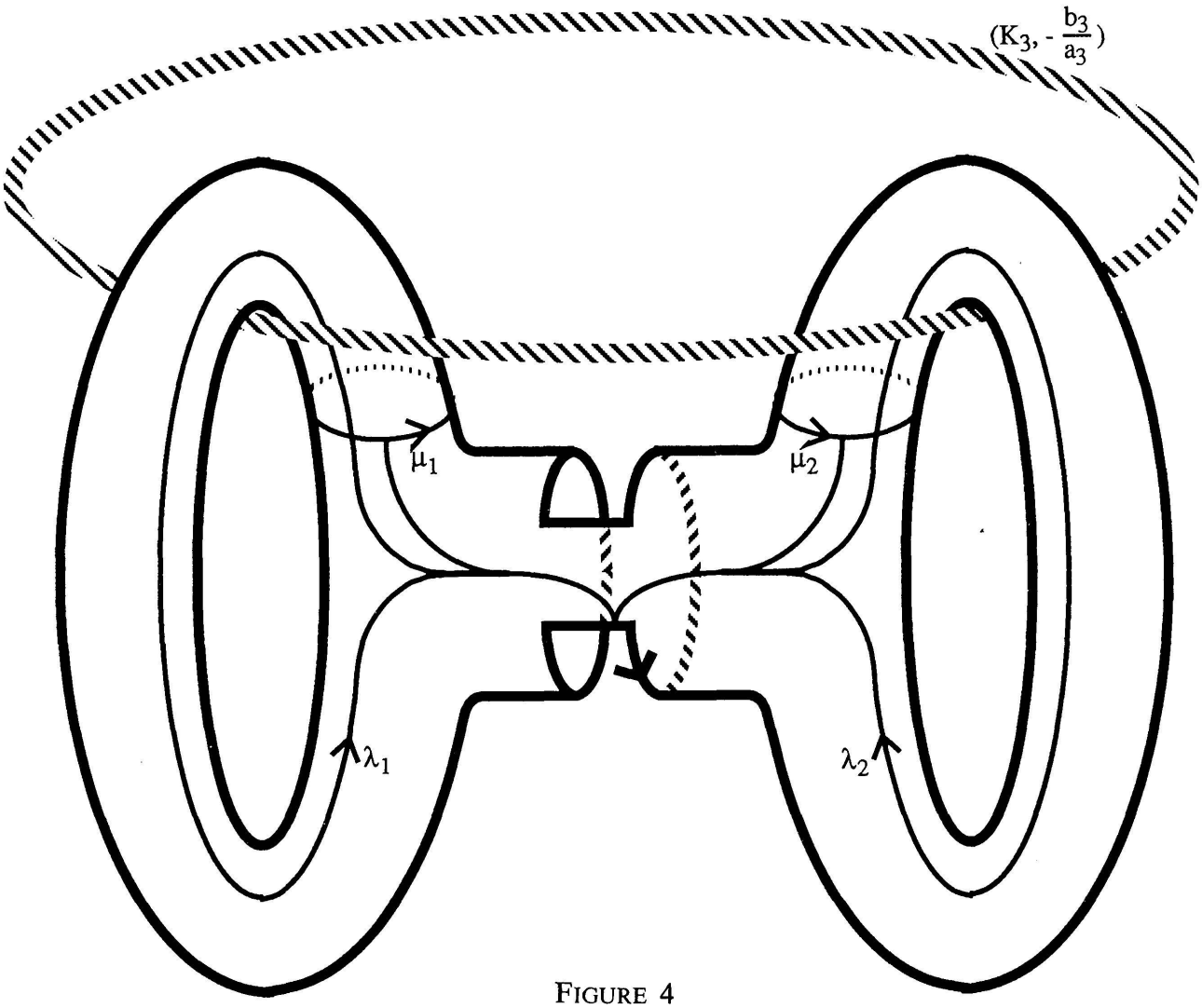

FIGURE 4

F_* plongée dans S^3 et les générateurs de $\pi_1(F_*)$

Conventions

$i(\ ,\ )$ désigne la forme d'intersection sur $H_1(F)$; un élément de $\pi_1(F)$ et son image dans $H_1(F)$ par l'homomorphisme d'Hurewicz sont notés de la même manière, leur nature est précisée par le contexte.

---

[1]) Attention: les lacets sont composés dans l'ordre opposé à l'ordre usuel et $[a, b]$ désigne le commutateur $a^{-1}b^{-1}ab$ (cf. les conventions avant 3.5).

Les deux éléments j_1 et j_2 de $\pi_1(W_1)$ représentés par des lacets de F respectivement homotopes aux âmes de T_1 et de T_2 et orientés de sorte que $i(a_1\mu_1 + b_1\lambda_1, j_1)$ et $i(a_2\mu_2 + b_2\lambda_2, j_2)$ valent 1, forment une base du groupe libre $\pi_1(W_1)$.

Soit $\lambda_3 = \mu_1\mu_2$ et $\mu_3 = \lambda_2$ les deux éléments de $\pi_1(F)$ représentés respectivement par une longitude et un méridien de K_3. L'élément j_3 de $\pi_1(W_2)$ représenté par un lacet de F homotope à l'âme de T_3, orienté de sorte que $i(a_3\lambda_3 - b_3\mu_3, j_3)$ vale 1, et l'élément j_4 de $\pi_1(W_2)$ représenté par μ_1 forment une base du groupe libre $\pi_1(W_2)$.

L'inclusion i_{1_*} de $\pi_1(F)$ dans $\pi_1(W_1)$ s'écrit alors:

$$i_{1_*}(\mu_1) = j_1^{-b_1} \qquad i_{1_*}(\mu_2) = j_2^{-b_2}$$
$$i_{1_*}(\lambda_1) = j_1^{a_1} \qquad i_{1_*}(\lambda_2) = j_2^{a_2}$$

tandis que l'inclusion i_{2_*} de $\pi_1(F)$ dans $\pi_1(W_2)$ s'écrit:

$$i_{2_*}(\mu_1) = j_4 \qquad i_{2_*}(\mu_2) = j_4^{-1} j_3^{b_3}$$
$$i_{2_*}(\lambda_1) = j_3^{a_3} \qquad i_{2_*}(\lambda_2) = j_3^{a_3} \qquad (i_{2_*}(\mu_1\mu_2) = j_3^{b_3}) .$$

2.C. Description des espaces de représentations associés

$R_* = R(\pi_1(F_*))$ est identifié à $(S^3)^4$ grâce à la base $(\mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2)$: à une représentation ρ de R_* correspond le quadruplet $(\rho(\mu_1), \rho(\lambda_1), \rho(\mu_2), \rho(\lambda_2))$. De la même manière, Q_1 et Q_2 sont identifiés à $(S^3)^2$ grâce aux bases (j_1, j_2) et (j_3, j_4).
Ces identifications orientent naturellement Q_1, Q_2 et R_*.

D'après 3.4 (cf. la preuve de 3.8 i)) et les expressions de i_{1_*} et de i_{2_*}, on a:

$$(Q_1, Q_2)_{R_*} = \det \begin{pmatrix} -b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & a_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & a_3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 + a_1a_2b_3 = 1$$

et donc: $\lambda(\Sigma(a_1, a_2, a_3)) = \dfrac{1}{2}\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2\rangle_{\hat{R}}$.

Le calcul consiste maintenant à évaluer $\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2\rangle_{\hat{R}}$.

§3. Etude de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$

Cette intersection est $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$, on utilise, pour simplifier les calculs et les notations, les conventions suivantes:

a_1 et a_2 sont impairs (quitte à permuter a_1, a_2 et a_3 qui jouent le même rôle).

On peut alors choisir b_1 et b_2 pairs, b_3 est alors impair.

Le groupe $SU(2)$ est naturellement identifié à la sphère unité du corps $\mathbf{H}$ des quaternions. On écrit les éléments de $SU(2) = S^3$ sous la forme $\exp(x)$ où x est un quaternion pur.

3.A. Description ensembliste de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$

Cette description montrera en particulier le lemme suivant:

Lemme. *Il existe une bijection naturelle de* $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ *dans l'ensemble* E *des points entiers, intérieurs au tétraèdre* $T(a_1, a_2, a_3)$, *et dont les deux premières coordonnées sont paires.*

Démonstration. Description des éléments de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$:

Le groupe $\pi_1(\Sigma)$ admet la présentation par générateurs et relations suivante:

$$\pi_1(\Sigma) = \langle \mu_1, \mu_2, h \mid h \text{ central}, \mu_1^{a_1} = h^{-b_1}, \mu_2^{a_2} = h^{-b_2}, (\mu_1\mu_2)^{a_3} = h^{b_3} \rangle$$
$$(h = \lambda_1 = \lambda_2) ;$$

les représentations irréductibles de $\pi_1(\Sigma)$ doivent associer 1 ou (-1) à l'élément central h de $\pi_1(\Sigma)$, on en déduit aisément que (cf. le lemme B.3.2) chaque classe de $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ contient exactement un représentant ρ tel que:

$$\rho(\mu_1) = \exp\left(\frac{ix_1\pi}{a_1}\right)$$

$$\rho(\mu_2) = \exp\left(\frac{(ir + j\sqrt{1-r^2})x_2\pi}{a_2}\right)$$

$$\text{et } \mathrm{Re}(\rho(\mu_1\mu_2)) \left(= \cos\left(\frac{x_1\pi}{a_1}\right)\cos\left(\frac{x_2\pi}{a_2}\right) - r\sin\left(\frac{x_1\pi}{a_1}\right)\sin\left(\frac{x_2\pi}{a_2}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x_3\pi}{a_3}\right) \text{ (et donc } \rho(h) = (-1)^{x_3})$$

où x_1, x_2 et x_3 sont des entiers positifs non nuls respectivement strictement inférieurs à a_1, a_2 et a_3,

x_1 et x_2 sont pairs,

et r est un réel strictement compris entre -1 et 1.

Ceci définit une bijection ϕ de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ dans l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) de $(2\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{Z}$ qui vérifient:

$$(*)\quad \begin{cases} \forall i \in \{1,2,3\}, 0 < x_i < a_i, \\ \exists r \in]-1,1[\text{ tel que: } \cos\left(\frac{x_1\pi}{a_1}\right)\cos\left(\frac{x_2\pi}{a_2}\right) - r\sin\left(\frac{x_1\pi}{a_1}\right)\sin\left(\frac{x_2\pi}{a_2}\right) = \cos\left(\frac{x_3\pi}{a_3}\right) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1,2,3\}, 0 < x_i < a_i \\ \cos\left(\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2}\right)\pi\right) < \cos\left(\frac{x_3\pi}{a_3}\right) < \cos\left(\left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)\pi\right). \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \left| \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} \right| < \frac{x_3}{a_3} < \min\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2}, 2 - \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2}\right)\right)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} - \frac{x_1}{a_1} > 0 \\ \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} < 2 \\ \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} > 0 \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$ est intérieur à $T(a_1, a_2, a_3)$. $\square$

LEMME. *Le cardinal de* E *est égal à* $\frac{1}{4}\tau(a_1, a_2, a_3)$.

Démonstration. Soit s_1 (resp. s_2) la symétrie axiale de $T(a_1, a_2, a_3)$ qui, à (x_1, x_2, x_3), associe le point $(a_1 - x_1, a_2 - x_2. x_3)$ (resp. $(a_1 - x_1, x_2, a_3 - x_3)$); s_1, s_2 et $s_2 s_1$ transforment respectivement $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{Z})$ en $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z}+1)^2 \times \mathbf{Z})$, $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z}+1) \times 2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$ et $(\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z}) \times (2\mathbf{Z}+1) \times \mathbf{Z})$; le cardinal de $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap \mathbf{Z}^3$ est donc égal à quatre fois celui de $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{Z})$. $\square$

Démonstration de C.2. Soit $\pi = (a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1)$ le cardinal de $P =]0, a_1[\times]0, a_2[\times]0, a_3[\cap \mathbf{Z}^3$.

Soit τ_k le cardinal de $T_k = \{(x_1, x_2, x_3) \in P \mid (k-1) < \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} < k\}$.

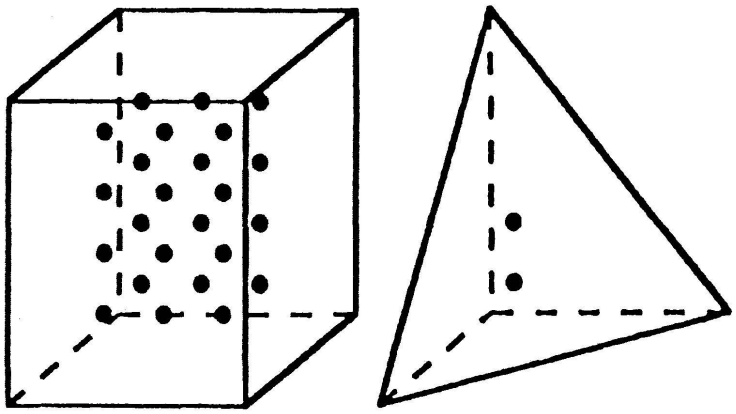

FIGURE 5

$P(3,4,5)$

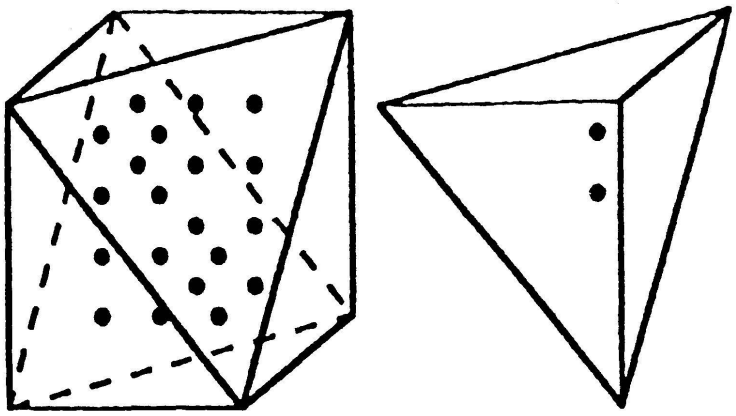

FIGURE 6

T_1, T_2 et T_3

Comme les entiers a_1, a_2 et a_3 sont premiers entre eux deux à deux, les hyperplans de définition de $T(a_1, a_2, a_3)$, T_1, T_2 et T_3 ne rencontrent pas P; on en déduit que P est réunion disjointe de T_1, T_2 et T_3 (donc: $\pi = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$) et que le cardinal de $P \setminus T(a_1, a_2, a_3)$ est $(\pi - \tau)$. $(\tau = \tau(a_1, a_2, a_3))$

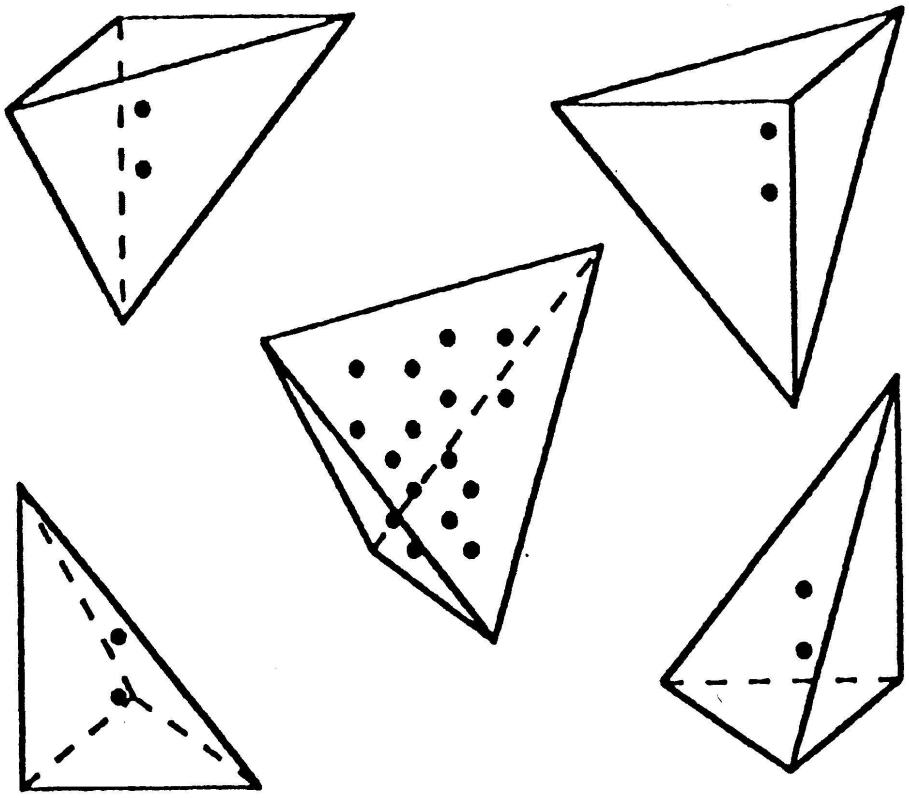

FIGURE 7

$T(3,4,5)$ et les quatre composantes de $P \setminus T(3,4,5)$

De plus, comme les symétries du parallélépipède P opèrent transitivement sur ses sommets en laissant le réseau $\mathbf{Z}^3$ invariant, T_1 est isomorphe à T_3 et aux quatre composantes de $P \setminus T(a_1, a_2, a_3)$, d'où

$$\tau_1 = \tau_3 = \frac{1}{4}(\pi - \tau), \text{ puis } \sum_{k=1}^{3} (-1)^k \tau_k = \pi - 4\tau_1 = \tau . \qquad \square$$

Démonstration de C.3. Un théorème de Mordell (Theorem 5 du paragraphe 3E de [RG]) donne l'expression arithmétique de $\tau_1(a_1, a_2, a_3)$:

$$\begin{aligned}\tau_1(a_1, a_2, a_3) = &- [s(a_1 a_2, a_3) + s(a_3 a_1, a_2) + s(a_2 a_3, a_1)] \\ &+ \frac{a_1 a_2 a_3}{12}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2}\right) + \frac{1}{12 a_1 a_2 a_3} \\ &+ \frac{a_1 a_2 a_3}{6} - \frac{a_1 a_2 + a_3 a_1 + a_2 a_3}{4} + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{4} - \frac{1}{2} .\end{aligned}$$

La relation entre $\tau(a_1, a_2, a_3)$ et $\tau_1(a_1, a_2, a_3)$:

$$«\tau(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1) - 4\tau_1(a_1, a_2, a_3)»$$

permet alors de conclure. $\square$

3.B. Etude du voisinage de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ dans $\hat{R}$

Proposition. *$\hat{Q}_1$ et $\hat{Q}_2$ sont transverses dans $\hat{R}$ et le signe associé à tout point de l'intersection est «moins».*

Démonstration. Soit $\hat{\rho}$ un point de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$; supposons connues des cartes orientées F_1, F_2 et F de $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ et $\hat{R}$ au voisinage de $\hat{\rho}$; il suffit de montrer que le déterminant de la matrice M de l'application linéaire

$$\begin{aligned} L:\ & \mathbf{R}^3 \oplus \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^6 \\ & (x_1, x_2) \mapsto D_{|F_1(\hat{\rho})}(F \circ \hat{i}_1 \circ F_1^{-1}).x_1 + D_{|F_2(\hat{\rho})}(F \circ \hat{i}_2 \circ F_2^{-1}).x_2 \end{aligned}$$

est strictement négatif.

On commence donc par définir des cartes F_1, F_2 et F de sorte que cette matrice s'écrive le plus simplement possible (on choisit les représentants des classes de conjugaison comme au début du paragraphe C.3.A.):

LEMME. «*Cartes au voisinage d'un point* $\hat{\rho}$ *de* $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$»

On note:

$\varepsilon = \rho(\lambda_1) = \rho(h)$,

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$, les trois angles de $]0, \pi[$ tels que $\rho(\mu_1), \rho(\mu_2), \rho(\lambda_3) = \rho(\mu_1\mu_2)$ soient respectivement conjugués à $\exp(i\theta_1), \exp(i\theta_2)$ et $\exp(i\theta_3)$

et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les trois signes tels que $\sin(-b_1\varepsilon_1\theta_1), \sin(-b_2\varepsilon_2\theta_2)$ et $\sin(b_3\varepsilon_3\theta_3)$ soient strictement positifs.

1. *Le difféomorphisme* $F_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *de* $\hat{Q}_1$ *dans* $\varepsilon_1]0, \pi[\times \varepsilon_2]0, \pi[\times]-1, +1[$ *qui, à la classe de* $(\exp(i\varphi), \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta))$, *associe* $(\varphi, \theta. r)$, *définit une carte orientée de* $\hat{Q}_1$.

2. *Le difféomorphisme* F_2 *de* $\hat{Q}_2$ *dans* $\varepsilon_3]0, \pi[\times]-1, +1[\times]0, \pi[$ *qui, à la classe de* $(\exp((ir + \exp(i\varphi)j\sqrt{1-r^2})\theta), \exp(i\varphi))$, *associe* (φ, r, θ), *définit une carte orientée de* $\hat{Q}_2$.

3. *L'application* F *de* $\hat{R}$ *dans* $(]0, \pi[\times]-1, +1[)^2 \times]-1, +1[^2$ *qui, à la classe de l'élément*

$$(\exp(i\varphi), \varepsilon(g_1 + ig_i + jg_j + kg_k), \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta), \varepsilon(h_1 + ih_i + jh_j + kh_k))$$

associe l'élément $(\varphi, g_i, \theta, r, h_j, h_k)$ *définit une carte orientée au voisinage de* $\hat{\rho}$ *dans* $\hat{R}$.

Démonstration.

1. Supposons d'abord ε_1 et ε_2 égaux à 1.

Comme $\tilde{Q}_1$ est connexe, pour montrer que $F_1(1, 1)$ est une carte de $\hat{Q}_1$ orienté comme base du $SO(3)$-fibré $(\tilde{Q}_1 \to \hat{Q}_1)$, il suffit de calculer le jacobien (positif!) de l'application tangente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$ du difféomorphisme

$$\begin{aligned} G_1 :]0, \pi[^2 \times]-1, +1[\times SO(3) &\to \tilde{Q}_1, \\ (\varphi, \theta, r, \gamma) &\mapsto (\exp(i\varphi).\gamma, \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta).\gamma). \end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration de 1. dans les cas où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est différent de $(1, 1)$, il suffit de remarquer que si $k(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est le difféomorphisme orienté

$$\begin{aligned} k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \quad \varepsilon_1]0, \pi[\times \varepsilon_2]0, \pi[\times]-1, +1[&\to]0, \pi[^2 \times]-1, +1[\\ (\varphi, \theta, r) &\mapsto (\varepsilon_1\varphi, \varepsilon_2\theta, \varepsilon_1\varepsilon_2 r), \end{aligned}$$

le composé $k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \circ F_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est égal à $F_1(1, 1)$.

2. Se déduit de 1, si l'on remarque que

$$(\exp(i\varphi), \exp((ir + \exp(i\varphi)j\sqrt{1-r^2})\theta))$$

est conjugué à $(\exp(i\varphi), \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta))$.

3. a) Soit $U =]0, \pi[\times S^3 \times]0, \pi[\times]-1, 1[\times S^3$, soit G le difféomorphisme

$$\begin{aligned} G\colon U \times SO(3) &\to G(U \times SO(3)) \subset R_* \\ ((\varphi, g, \theta, r, h), \gamma) &\mapsto (\exp(i\varphi).\gamma, \varepsilon g.\gamma, \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta).\gamma, \varepsilon h.\gamma)\ , \end{aligned}$$

et soit G_r la restriction de G à $U \times \{1\}$,
p désigne la projection de R_* sur $\hat{R}_*$, et p_r désigne sa restriction de $G(U \times \{1\})$ dans $p \circ G(U \times \{1\})$; d'après 1, $p_r \circ G_r$ est un difféomorphisme qui renverse l'orientation.

b) De plus, le calcul de l'application tangente en $p_r^{-1}(\hat{\rho})$ de ∂ montre que l'application (qui définit implicitement ψ)

$$\begin{aligned} (\partial \times \psi) \circ G_r\colon (U \times \{1\}) &\to S^3 \times (]0, \pi[\times]-1, +1[)^2 \times]-1, +1[^2 \\ u = (\varphi, g = (g_1 + ig_i + jg_j + kg_k), \theta, r, h &= (h_1 + ih_i + jh_j + kh_k)) \\ \mapsto (\partial G_r(u) = [g^{-1}, \exp(i\varphi)]\ [\exp(-(ir + j\sqrt{1-r^2})\theta), h^{-1}],\ &(\varphi, g_i, \theta, r, h_j, h_k)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme qui renverse l'orientation au voisinage de $G_r^{-1} p_r^{-1}(\hat{\rho})$.

On en déduit que $F = \psi \circ p_r^{-1}$ définit une carte orientée de $\hat{R}$ au voisinage de la classe de $\hat{\rho}$ de la manière suivante:

Si l'on écrit l'inverse de G de $G(U \times SO(3))$ dans $U \times SO(3)$ sous la forme $(G_r^{-1} \circ p_r^{-1} \circ p) \times \tilde{\gamma}$ (où $\tilde{\gamma}$ est le composé de G^{-1} et de la projection sur $SO(3)$) l'application $\tilde{\chi} = [(\partial \times \psi) \circ p_r^{-1} \circ p] \times \tilde{\gamma}$ est, d'après a) et b), un difféomorphisme orienté d'un voisinage de la classe de $\hat{\rho}$ dans R_* dans un ouvert de $S^3 \times \mathbf{R}^6 \times SO(3)$.

Le composé $(\chi = \partial \times (\psi \circ p_r^{-1} \circ p) \times \tilde{\gamma})$ de $\tilde{\chi}$ et du difféomorphisme orienté de $S^3 \times \mathbf{R}^6 \times SO(3)$, qui à (g, x, γ) associe $(g.\gamma, x, \gamma)$, est alors un difféomorphisme orienté d'un voisinage de la classe de $\hat{\rho}$ dans R_* dans un ouvert de $S^3 \times \mathbf{R}^6 \times SO(3)$ tel que:

$$\partial(\chi^{-1}(g, x, \gamma)) = g \quad \text{et} \quad \chi([\chi^{-1}(g, x, \gamma)].\gamma') = (g, x, \gamma\gamma')\ .$$

Ceci, d'après les conventions d'orientation de 3.11, permet de conclure la démonstration du lemme. □

Avec ces cartes, la matrice M s'écrit:

$$\begin{pmatrix} ? & 0 & 0 & t_4 & 0 & ? \\ t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \\ ? & ? & 0 & ? & t_6 & ? \\ ? & ? & t_2 & ? & ? & ? \\ ? & t_5 & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \end{pmatrix}$$

avec $t_1 = a_3 \sin(\varphi)\sqrt{1-r^2}$ $\quad t_3 = a_1$ $\quad t_5 = a_2\sqrt{1-r^2}$

$t_2 = 1$ $\quad t_4 = 1$ $\quad t_6 = -\dfrac{\sin(\varphi)\sin(\varepsilon_3 b_3 \theta_3)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(x = \cos(\varphi)\cos(\varepsilon_3 b_3 \theta_3) + r\sin(\varphi)\sin(\varepsilon_3 b_3 \theta_3)) \ ,$$

son déterminant qu'on peut calculer en factorisant successivement les t_i dans l'ordre indiqué par leurs indices est égal à

$$-\frac{a_1 a_2 a_3 \sin^2(\varphi)\ (1-r^2)\sin(\varepsilon_3 b_3 \theta_3)}{\sqrt{1-x^2}}$$

il est donc bien strictement négatif. □

BIBLIOGRAPHIE

[AB] ATIYAH, M. and R. BOTT. The Yang-Mills equations over a Riemann surface. *Phil. Trans. Royal Soc. London 308* (1987), 523-615.

[AMcC] AKBULUT, S. and J. D. Mc CARTHY. *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres, an exposition.* Mathematical Notes 36, Princeton University Press 1990.

[BL] BOYER, S. and D. LINES. Surgery formulae for Casson's invariant and extension to homology lens spaces. *J. Für die Reine und angewandte Mathematik 405* (1990), 181-220.

[CLM] CAPPELL, S., R. LEE and E. MILLER. A symplectic geometry approach to generalized Casson's invariants of 3-manifolds. *B.A.M.S. 22* (1990), 269-275.

[D] DOLD, A. *Lectures on algebraic topology.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 200 Springer-Verlag, 1972.

[FS] FINTUSHEL, R. and R. STERN. Instanton homology of Seifert fibered homology three sphere. *Proc. London Math. soc., 3rd series 61* (1990), 109-137.