

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES
D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS
Autor: Guillou, L. / Marin, A.
Kapitel: III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B.I
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59492>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B.1

Soit F_0 la surface de Seifert dénouée du nœud K et $F = F_- \cup F_+$ le bord d'un voisinage régulier W_1 de F_0 et W_2 le bretzel complémentaire.

Choisissons une base (e_1, e_2) de $\pi_1(F_0)$ induisant une base symplectique de $H_1(F_0)$ et prenons-la pour base de $\pi_1(W_1)$. Choisissons aussi une base (f_1, f_2) de $H_1(W_2)$ telle que la matrice des nombres d'enlacement $lk(e_i, f_j)$ soit la matrice identité, alors la matrice de l'application induite par l'inclusion $H_1(F_+) \rightarrow H_1(W_2)$ est la matrice de Seifert S de F_0 . Une base symplectique de $H_1(F_*)$ est $(e_2^-, e_1^-, e_1^+, e_2^+)$ où e_i^\pm est la courbe e_i poussée dans F_\pm .

CALCUL DE $(Q_1, Q_2)_{R_*}$

On identifie, grâce aux bases précédentes, $R_*, Q_1, Q_2, R_0, R_-, R_+$ à des produits de sphères S^3 . D'après le corollaire 3.4 le nombre d'intersection $(Q_1, Q_2)_{R_*}$ est égal à

$$\det(H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_1) \oplus H_1(W_2))$$

où les flèches en homologie sont induites par les inclusions d'espace.

Les matrices de $H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_1)$ et $H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_2)$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} {}^tS & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S \end{pmatrix}$ où S est la matrice de Seifert de la surface F_0 et tS sa transposée. Notons T la matrice ${}^tS \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$(Q_1, Q_2)_{R_*} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ T & S \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & S - {}^tS \end{bmatrix} = -\det(S - {}^tS) = -1,$$

car $S - {}^tS$ est la matrice de la forme d'intersection de F_0 donc de déterminant 1. \square

CALCUL DE $\langle \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} = 2 \langle \hat{\delta}, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$

Remarquons que $\hat{\delta} \subset \hat{R}_-$ est inclus dans l'ouvert $\hat{\mathcal{U}}$ donc d'après la partie II

$$\begin{aligned} 2 \langle \hat{\delta}, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} &= 2(\hat{\delta} \cdot (\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}))_{\hat{R}} = 2\varepsilon(f(\hat{\delta}) \cdot f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}))_{\tilde{R}_+} \\ &= 2\varepsilon(\varepsilon\Sigma \cdot f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}))_{\tilde{R}_+} = -2 \deg(\pi: f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}) \rightarrow \hat{R}_+). \end{aligned}$$

Or on a un morphisme de $SO(3)$ fibrés

$$\begin{array}{ccc} Q_2 \cap \mathcal{U} & \xrightarrow{i_+|_{Q_2 \cap \mathcal{U}}} & \tilde{R}_+ \\ \sigma \uparrow \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \hat{R}_+ \end{array}$$

où $i_+ : Q_2 \rightarrow R_+$ est induit par l'inclusion $F_+ \rightarrow W_1$ et $\bar{\pi}$ est défini par ce diagramme.

Donc

$$\deg(\bar{\pi}) = \deg(i_+|_{Q_2 \cap \mathcal{U}}) = \deg(i_+) = \deg(H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_2)) = \det(S)$$

où la troisième égalité a lieu d'après le corollaire 3.4.

$$\text{Donc } \langle \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} = -2 \det(S).$$

Comme $g = 2$ il vient bien:

$$\begin{aligned} \lambda'(K) &= \frac{1}{2} (-1)^g \frac{\langle \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}}{(Q_1, Q_2)_{R_*}} = \frac{1}{2} \frac{-2 \det(S)}{-1} \\ &= \det(S). \quad \square \end{aligned}$$