Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS

Autor: Guillou, L. / Marin, A.

Kapitel: II. Un ouvert de représentations irréductibles DU GROUPE FONDAMENTAL D'UNE SURFACE DE GENRE 2

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59492

L'élément qui conjugue ρ à une telle représentation de l'image de σ est unique au signe près et (on peut le calculer explicitement) son image dans $SO(3)$ dépend différentiablement de ρ. Donc $\pi \circ \sigma$ est un difféomorphisme. $\square$

B.4. *Remarque.* Il est facile de continuer les calculs précédents pour voir que si l'on oriente l'image de σ en transportant l'orientation de $D \times]0, \pi[\subset \mathbf{R}^3$ par $D\sigma$ alors: d'une part $D\partial_{\sigma(0,\pi/2)}: T_{\sigma(0,\pi/2)}\mathrm{Im}(\sigma) \to \mathscr{L} = T_1 S^3$ renverse l'orientation et d'autre part si l'orbite par $SO(3)$ de $\sigma(0, \pi/2)$ est orientée comme $SO(3)$ alors $T_{\sigma(0,\pi/2)}\mathrm{Im}(\sigma) \oplus T_{\sigma(0,\pi/2)}\sigma(0, \pi/2).SO(3)$ a une orientation opposée à celle de $\mathscr{L} \oplus \mathscr{L}$ et donc $D\pi_{\sigma(0,\pi/2)}: T_{\sigma(0,\pi/2)}\mathrm{Im}(\sigma) \to T_{\hat{\sigma}(0,\pi/2))}\hat{R}(L_2)$ renverse l'orientation. En définitive, on voit que l'ensemble Σ (du lemme B2) a la même orientation qu'il soit vu comme fibre de π ou comme fibre de ∂. Nous verrons cependant que nous n'avons pas besoin de ce calcul, la différence $\varepsilon = \pm 1$ (éventuelle) d'orientation intervenant deux fois !

II. Un ouvert de représentations irréductibles du groupe fondamental d'une surface de genre 2

Soit $F = F_- \cup F_+$ une surface de genre 2, union de deux exemplaires F_- et F_+ d'une surface à bord F_0 de genre 1. Choisissons des bases (e_1^-, e_2^-) de $\pi_1(F_-)$ et (e_1^+, e_2^+) de $\pi_1(F_+)$ de sorte que $\delta_- = [e_1^-, e_2^-] = [\partial F_-]$ dans $\pi_1(F_-)$ et $\delta_+ = [\partial F_+]$ dans $\pi_1(F_+)$. Ces bases identifient $\pi_1(F_-)$ et $\pi_1(F_+)$ à des groupes libres sur deux générateurs et $R_- = R(\pi_1(F_-))$ comme $R_+ = R(\pi_1(F_+))$ à $S^3 \times S^3$. On note $\partial_-: R_- \to S^3$ et $\partial_+: R_+ \to S^3$ les flèches d'évaluation sur δ_- et δ_+ respectivement. On a comme en I des applications $\sigma_-: D \times]0, \pi[\to R_-$ et $\sigma_+: D \times]0, \pi[\to R_+$. On oriente R_* grâce à la base $e_1^-, e_2^-, e_1^+, e_2^+$ de F_*. Alors $R_* = R_- \times R_+$ et l'espace des représentations de $\pi_1(F)$ est

$$R = \{(\rho_-, \rho_+) \in R_- \times R_+ \mid (\partial_-(\rho_-))^{-1} = \partial_+(\rho_+)\}\,.$$

Désignons par $\mathscr{U}$ l'ouvert de $\tilde{R}$ formé des représentations $\rho = (\rho_-, \rho_+)$ de R telles que $\partial_+(\rho_+) \neq 1$.

D'après le lemme B3 dans la classe de conjugaison de tout élément ρ de $\tilde{\mathscr{U}}$ il existe un unique élément de la forme $(\sigma_-(\alpha, t), \rho_+)$. Ce ρ_+ est dans $\tilde{R}_+$ et on définit ainsi un difféomorphisme

$$f\colon \hat{\mathscr{U}} \to \tilde{R}_+$$

dont l'inverse associe à $\rho_+ \in \tilde{R}_+$ la classe de conjugaison de $(\sigma_-(\alpha, t), \rho_+)$ où $\sigma_-(\alpha, t)$ est choisi de sorte que $\partial_-\sigma_-(\alpha, t) = (\partial_+\rho_+)^{-1}$.

B.5. LEMME. *Le difféomorphisme* f *préserve ou renverse l'orientation selon que le signe* ε *de la remarque B4 vaut* $+1$ *ou* -1.

Démonstration de B.5. On a d'abord des difféomorphismes:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_- \times \tilde{R}_+ &\leftarrow (D \times]0,\pi[) \times SO(3) \times \tilde{R}_+ \to (S^3 - \{1\}) \times SO(3) \times \tilde{R}_+ \\ (\sigma_-(\alpha, t).g, \rho_+) &\leftarrow\!\shortmid ((\alpha, t), g, \rho_+) \mapsto (\partial_-\sigma_-(\alpha, t).g, g, \rho_+) \end{aligned}$$

D'où un difféomorphisme $\varphi\colon \tilde{R}_- \times \tilde{R}_+ \to (S^3 - \{1\}) \times SO(3) \times \tilde{R}_+$ qui préserve ou renverse l'orientation selon que ε vaut 1 ou -1. On a aussi un difféomorphisme

$$\psi\colon S^3 \times SO(3) \times \tilde{R}_+ \to S^3 \times \tilde{R}_+ \times SO(3), (x, g, \rho_+) \mapsto (x.\partial_+\rho_+, \rho_+.g^{-1}, g)$$

qui préserve l'orientation.

Enfin le point $(\sigma_-(0, \pi/2), \rho_+^0)$ de $\tilde{R}_- \times \tilde{R}_+$ où $\partial_+\rho_+^0 = -1 = \partial_-\sigma_-(0, \pi/2)$ admet un voisinage dans $R_* \supset \tilde{R}_- \times \tilde{R}_+$ qui est positivement difféomorphe à $A \times B \times C$ où A est un voisinage de 1 dans S^3, B un voisinage de la classe de $(\sigma_-(0, \pi/2), \rho_+^0)$ dans $\hat{\mathscr{U}}$ et C un voisinage de 1 dans $SO(3)$. Par composition on obtient un plongement ouvert

$$\begin{array}{ccc} A \times B \times C & \to & S^3 \times \tilde{R}_+ \times SO(3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \times C & \to & S^3 \times SO(3) \end{array}$$

faisant commuter le diagramme (car si $\psi \circ \varphi(\rho_-, \rho_+) = ((\partial_-\rho_-).(\partial_+\rho_+), \rho_+.g^{-1}, g)$ alors

$$\psi \circ \varphi((\rho_-, \rho_+).g') = ((\partial_-\rho_-).(\partial_+\rho_+), \rho_+.g^{-1}, g.g'))$$

et tel que $1 \times B \times 1$ s'envoie sur $1 \times O \times 1$ où O est un voisinage de ρ_+^0 dans $\tilde{R}_+$. Donc $f\colon \hat{\mathscr{U}} \to \tilde{R}_+$ préserve ou renverse l'orientation selon que ε vaut 1 ou -1.