Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES

D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS

Autor: Guillou, L. / Marin, A.

Anhang: Appendice A Polynôme d'Alexander et forme quadratique d'un

entrelacs orienté: Formule de Conway et invariant de Robertello

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59492

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

APPENDICE A

POLYNÔME D'ALEXANDER ET FORME QUADRATIQUE D'UN ENTRELACS ORIENTÉ:

FORMULE DE CONWAY ET INVARIANT DE ROBERTELLO

Soit K un entrelacs orienté dans une sphère d'homologie orientée M et F une surface de Seifert connexe pour K (cf. [Rf] p. 118-120 ou [G] p. 24-28). Soit $i: F \times [-1,1] \to M$ un bicollier orienté autour de F dans M. La forme de Seifert de la surface F est la forme bilinéaire $\mathscr D$ définie sur $H_1(F; \mathbb Z)$ qui associe à deux classes d'homologie représentées par deux courbes x et y tracées sur la surface F le nombre d'enlacement de $x^+ = i(x, 1)$ et de y. Une matrice de Seifert F F Soit F est une matrice de la forme F dans une base de F est une matrice de la forme F est une matrice F est une ma

La forme antisymétrique $I = \mathscr{L} - {}^t \mathscr{L}$ est ²) la forme d'intersection de la surface F, et si K est un nœud elle est unimodulaire car égale à celle de la surface F recollée avec un disque le long de K.

La forme symétrique q = s + t s est la forme quadratique de la surface F, elle est paire et dans le cas d'un nœud, non dégénérée de discriminant impair car congrue modulo 2 à I. L'invariant de Arf de la réduction q_2 modulo 2 de q/2 est l'invariant de Rohlin-Robertello du nœud K (cf. [Rb]).

Le polynôme d'Alexander normalisé³) de K est $\Delta_K(t) = \det(t^{1/2}S - t^{-1/2}tS)$. Dans le cas d'un nœud, le rang de $H_1(F; \mathbb{Z})$ est pair et on obtient un polynôme⁴) en t et t^{-1} qui vérifie $\Delta_K(1) = 1$ et $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$. On en déduit que le polynôme d'Alexander ne dépend pas de l'orientation ambiante (car si l'on renverse celle-ci, la matrice de Seifert se change en sa transposée).

¹⁾ Deux surfaces de Seifert d'un même entrelacs sont isotopes après que l'on leur ait rajouté des anses triviales et donc deux matrices de Seifert sont S équivalentes: congruentes après un certain nombre de stabilisations $S \mapsto \begin{bmatrix} S & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou $S \mapsto \begin{bmatrix} S & * & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (cf. [G]).

²) ^t ω désigne la transposée de la forme ω : ^t $\omega(x, y) = \omega(y, x)$.

³) D'après la note 1 ci-dessus $\Delta_K(t)$ ne dépend pas du choix de la surface de Seifert S.

⁴) Plus généralement si le rang de $H_1(F; \mathbf{Z})$ est pair (sinon $t^{1/2}\Delta_K(t)$ est un polynôme en t et t^{-1}).

La variation par changement de croisement du polynôme d'Alexander normalisé est donnée par la formule de Conway:

A.1. LEMME (Formule de Conway). Soient K_- , K_0 et K_+ trois entrelacs orientés qui coïncident hors d'une boule B et coupent cette boule en deux arcs dénoués disposés suivant les schémas de la figure 12

Alors:

$$\Delta_{K_{+}}(t) - \Delta_{K_{-}}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2}) \Delta_{K_{0}}(t) .$$

$$K_{0} \qquad K_{+}$$

$$K_{0} \qquad K_{+}$$

$$F_{0} \qquad F_{1} \qquad F_{1} \qquad F_{2} \qquad F_{3} \qquad F_{4} \qquad F_{4} \qquad F_{5} \qquad$$

Modification d'une surface de Seifert lors d'un changement d'un croisement

Démonstration de A.1. Soit F_0 une surface de Seifert connexe pour K_0 qui coupe la boule B en deux disques disjoints bordés chacun par un arc de ∂B et une composante de $B \cap K$. Définissons F_+ et F_- des surfaces de Seifert pour K_+ et K_- qui sont égales à F_0 hors de B et dans B sont les bandes que l'on voit sur la figure 12.

Les paires de surfaces (F_+, F_0) et (F_-, F_0) sont abstraitement difféomorphes. Soient $(a_1, ..., a_n)$ des courbes de F_0 formant une base de $H_1(F_0; \mathbb{Z})$ et soit a_0 une courbe de F_{\pm} telle que $(a_0, a_1, ..., a_n)$ donne une base de $H_1(F_{\pm}; \mathbb{Z})$. Si S_-, S_0, S_+ sont les matrices de Seifert correspondantes dans ces bases on a

$$S_{+} = \begin{pmatrix} a & c_{1} \dots c_{n} \\ b_{1} & & \\ & V_{0} \end{pmatrix}, S_{-} = S_{+} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & & \\ & 0 \end{pmatrix}, \text{donc}$$

$$t^{1/2}S_{+} - t^{-1/2}{}^{t}S_{+} = t^{1/2}S_{-} - t^{-1/2}{}^{t}S_{-} - \begin{pmatrix} t^{1/2} - t^{-1/2} & 0 \dots 0 \\ 0 & & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & & \\ & t^{1/2}S_{0} - t^{-1/2}{}^{t}S_{0} \end{pmatrix}.$$

En développant $\det(t^{1/2}S_+ - t^{-1/2}{}^tS_+)$ et $\det(t^{1/2}S_- - t^{-1/2}{}^tS_-)$ suivant la première colonne on obtient l'identité cherchée.

A.2. Lemme. Soit K un nœud dans une sphère d'homologie M alors l'invariant de Rohlin-Robertello de K est la réduction modulo 2 de $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$.

Démonstration de A.2. La forme quadratique de la surface F de matrice $Q = S + {}^tS$ est paire et de discriminant impair, elle est donc semblable sur les entiers 2-adiques à une somme orthogonale de formes paires de rang 2 (cf. [HNK] p. 4-5):

$$Q = {}^{t}P\begin{pmatrix} * \\ 2a_{j} & 1 \\ 1 & 2b_{j} \end{pmatrix}_{*}P$$
 où la matrice P est de déterminant impair .

Il vient donc:
$$\Delta_K(-1) = \det(iQ) = \det(P)^2 \prod_{j=1}^g \det\left(i\left(\frac{2a_j}{1} - \frac{1}{2b_j}\right)\right)$$

$$= \det(P)^2 \prod_{j=1}^g (1 - 4a_jb_j) \equiv 1 + 4 \sum_{j=1}^g a_jb_j \text{ modulo } 8$$

On a donc la formule de Levine:

$$\Delta_K(-1) \equiv 1 + 4Arf(q_2) \text{ modulo } 8.$$

Puisque $\Delta_K(t)$ est un polynôme en t et t^{-1} , la série de Taylor en 1 de $\Delta_K(t)$ est à coefficients entiers. Elle permet donc de calculer dans les entiers deux-adiques la valeur du polynôme d'Alexander en tout nombre impair et en particulier:

$$\Delta_K(-1) = \Delta_K(1) + \Delta_K'(1) \times (-2) + \frac{1}{2} \Delta_K''(1) \times (-2)^2$$

$$-8 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta_K^{(n)}(1) \times (-2)^{n-3},$$

Par normalisation on a $\Delta_K(1)=1$ et $\Delta_K(t)=\Delta_K(t^{-1})$ donc $\Delta_K'(1)=0$ d'où

$$\Delta_K(-1) \equiv 1 + 4\frac{1}{2}\Delta_K''(1) \text{ modulo } 8.$$

Ce qui par comparaison avec la formule de Levine établit A.2:

$$\operatorname{Arf}(q_2) = \frac{1}{2} \Delta_K''(1) \text{ modulo } 2.$$