

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES HOMOGENES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE
Autor: Maire, H.-M.
Kapitel: 2. Exemples et cas particuliers
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59491>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$h \mapsto \langle P''(x)h | h \rangle$ est constant pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, car $n \geq 2$. Pour $0 \leq p \leq n$ et $q = n - p$, soit

$$H_{p,q}^{(m)} = \{P \in H_n^{(m)} \mid \text{ind } P''(x) = p, \forall x \neq 0\}.$$

On a bien sûr: $H_n^{(m)} = \bigcup_{p=0}^n H_{p,q}^{(m)}$.

Quand $m = 2$, l'ensemble $H_{p,q}^{(2)}$ s'identifie à l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées d'indice p sur \mathbf{R}^n . Mais si m est supérieur à 2, il n'est pas immédiat de trouver un polynôme homogène de degré m satisfaisant à (1), avec hessien *indéfini*. Les polynômes *harmoniques* sont de bons candidats si n est égal à 2 (cf. Exemple (2.1)), mais pas en dimension supérieure. En effet, H. Lewy [6], puis B. Segre [9] et V.E. Galafassi [4] ont montré qu'il n'existe pas de polynôme harmonique dans $H_n^{(m)}$ si $m > 2$ et $n > 2$.

Dans cet article, nous répondons aux questions suivantes:

Pour quelles valeurs de m, p et q , l'ensemble $H_{p,q}^{(m)}$ est-il non vide?

Pour P dans $H_{p,q}^{(m)}$, quel est le nombre de composantes connexes de $P^{-1}(0) \setminus \{0\}$?

Quels sont les nombres de Betti des variétés de niveaux de $P: \{P = \alpha\}$, respectivement des variétés de sous-niveaux de $P: \{P \leq \alpha\}$?

L'étude de $H_{p,q}^{(m)}$ est motivée par les résultats de Helffer-Nourrigat et de l'auteur sur l'hypoellipticité maximale du système de Cauchy-Riemann induit sur une hypersurface de \mathbf{C}^{n+1} , cf. [5] et [7]. Il est facile de vérifier que si $P \in H_{p,q}^{(m)}$ et $p, q \neq j$ alors l'hypersurface tubulaire de \mathbf{C}^{n+1} définie par $\text{Re } z_0 = P(\text{Re } z_1, \dots, \text{Re } z_n)$ satisfait la condition de Derridj $D(j)$ qui est nécessaire pour l'hypoellipticité maximale de $\bar{\partial}_b$ sur les $(0, j)$ -formes. La connectivité des sous-niveaux de P est utile pour montrer que $D(j)$ est aussi suffisante.

Le plan de l'article est le suivant. Au paragraphe 2, une liste d'exemples ou contre-exemples simples illustre les différents cas exceptionnels: $n = 2$, $p = 0$ ou $m = 4$ et génériques: $m \geq 6$. Les résultats principaux sont énoncés au paragraphe 3 et démontrés au paragraphe 4.

2. EXEMPLES ET CAS PARTICULIERS

(2.1) EXEMPLE. Pour $m \geq 2$ le polynôme $P(x, y) = \text{Re}(x + iy)^m$ appartient à $H_{1,1}^{(m)}$

Preuve. Si $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann donnent

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} f = -\operatorname{Im} \frac{df}{dz},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} f = \operatorname{Re} \frac{df}{dz}$$

et, par suite,

$$\det (\operatorname{Re} f)'' = - \left| \frac{d^2 f}{dz^2} \right|^2.$$

Quand $f(z) = z^m$, le déterminant hessien de $\operatorname{Re} f$ est donc négatif, sauf en $z = 0$. \square

(2.2) EXEMPLE. $P(x) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^k$, pour $k \geq 1$, appartient à $H_{0,n}^{(2k)}$.

Preuve. Par calcul direct, on trouve que $P''(x)$ vaut $2k |x|^{2k-4}$ fois

$$\begin{pmatrix} (2k-1)x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 & (2k-2)x_1x_2 & \dots \\ (2k-2)x_1x_2 & x_1^2 + (2k-1)x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Si $x = (1, 0, \dots, 0)$, cette matrice est diagonale de valeurs propres $2k(2k-1)$, $2k, \dots, 2k$. Comme P est invariant par toute transformation orthogonale et comme

$$(3) \quad U \in GL(n, \mathbf{R}) \Rightarrow U^t P''(Ux)U = (P \circ U)''(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

les valeurs propres de $P''(x)$ sont

$$2k(2k-1) |x|^{2k-2}, 2k |x|^{2k-2}, \dots, 2k |x|^{2k-2}. \quad \square$$

(2.3) LEMME. Pour m impair supérieur à 2, on a :

$$H_{0,2}^{(m)} = H_{2,0}^{(m)} = \emptyset.$$

Preuve. Soit P un polynôme homogène de degré m et dénotons par $a \in \mathbf{S}^1$ (sphère unité de \mathbf{R}^2) un point où P atteint son maximum sur \mathbf{S}^1 . La méthode des multiplicateurs de Lagrange et la relation d'Euler montrent que $P'(a) = mP(a)a$. Une seconde application de la relation d'Euler donne

$$P''(a)a = (m-1)P'(a) = m(m-1)P(a)a.$$

Ainsi a est vecteur propre de $P''(a)$ avec valeur propre $m(m-1)P(a)$. Si P appartient à $H_{2,0}^{(m)}$ alors cette valeur propre est négative et, par suite, $P(a)$ est négatif. Il s'ensuit que P est négatif en dehors de 0, donc m est pair. \square

(2.4) PROPOSITION (A. Andreatta [1]). Si $k \geq 1$ et $n \geq 3$, alors $H_n^{(2k+1)} = \emptyset$.

Preuve. Si P est un polynôme homogène de degré impair alors P' est une application homogène de degré pair; elle est donc non injective. D'après la proposition (4.1), il s'ensuit que $P \notin H_n^{(2k+1)}$. \square

(2.5) EXEMPLE. L'ensemble $H_{2,2}^{(4)}$ ne contient pas de polynôme du type suivant:

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq 4} a_{jk} x_j^2 x_k^2.$$

Preuve. Soit P un polynôme de ce type appartenant à $H_4^{(4)}$. Alors $P''(x)$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 12a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_2^2 + 2a_{13}x_3^2 + 2a_{14}x_4^2 & \cdots & & 4a_{14}x_1x_4 \\ & \vdots & & \vdots \\ & & & \vdots \\ 4a_{14}x_1x_4 & \cdots & 2a_{14}x_1^2 + 2a_{24}x_2^2 + 2a_{34}x_3^2 + 12a_{44}x_4^2 & \end{pmatrix}.$$

Quand $x_4 = 0$, le déterminant de $P''(x)$ est un multiple de $Q(x_1, x_2, x_3) := 2a_{14}x_1^2 + 2a_{24}x_2^2 + 2a_{34}x_3^2$; d'après (1), la forme quadratique Q doit être définie et donc a_{14} , a_{24} et a_{34} ont le même signe. D'autre part, pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et $x_4 = 1$, les valeurs propres de $P''(x)$ sont $2a_{14}$, $2a_{24}$, $2a_{34}$ et $12a_{44}$. Donc l'indice de $P''(0, 0, 0, 1)$ est différent de 2 et, par suite, le polynôme P n'appartient pas à $H_{2,2}^{(4)}$. \square

Remarque. Il est facile de trouver des polynômes homogènes de degré pair dont la matrice hessienne a p valeurs propres ≤ 0 et q valeurs propres ≥ 0 . En effet, $P(x) = -x_1^{2k} - \dots - x_p^{2k} + x_{p+1}^{2k} + \dots + x_n^{2k}$ pour k entier ≥ 1 convient. Mais dès que k est supérieur à 1, $P \notin H_n^{(2k)}$. Une légère modification de cet exemple fournit un élément de $H_{1,2}^{(6)}$.

(2.6) EXEMPLE (A. Andreatta [2]). Le polynôme

$$P_\lambda = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \lambda(x_1^6 + x_2^6 - x_3^6)$$

appartient à $H_{1,2}^{(6)}$ pour $\lambda \geq 2$.

Preuve. Soit $Q = P_2$. On a

$$Q''_{11} = 90x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 2x_2^4 - 12x_1^2x_3^2 + 2x_3^4,$$

$$Q''_{22} = 2x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 90x_2^4 - 12x_2^2x_3^2 + 2x_3^4,$$

$$Q''_{33} = -2x_1^4 - 2x_2^4 + 12x_1^2x_3^2 + 12x_2^2x_3^2 - 90x_3^4,$$

$$Q''_{12} = 8x_1^3x_2 + 8x_1x_2^3, \quad Q''_{13} = -8x_1^3x_3 + 8x_1x_3^3, \quad Q''_{23} = -8x_2^3x_3 + 8x_2x_3^3.$$

Comme $8x_1^2(x_1^2 + x_2^2) \leq Q''_{11}$ et $8x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \leq Q''_{22}$, on a

$$(\sqrt{8x_1^2(x_1^2 + x_2^2)} Q''_{23})^2 \leq Q''_{11} Q''_{23}{}^2 \quad \text{et} \quad (\sqrt{8x_2^2(x_1^2 + x_2^2)} Q''_{13})^2 \leq Q''_{22} Q''_{13}{}^2.$$

D'après l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, il en découle

$$2Q''_{12} Q''_{13} Q''_{23} \leq Q''_{11} Q''_{23}{}^2 + Q''_{22} Q''_{13}{}^2.$$

D'autre part, on vérifie que

$$Q''_{11} \geq 54x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4, \quad Q''_{22} \geq 2x_1^4 + 54x_2^4 + x_3^4, \\ Q''_{33} \leq -x_1^4 - x_2^4 - 18x_3^4,$$

et, par conséquent,

$$Q''_{11} Q''_{22} - Q''_{12}{}^2 \geq x_1^8 + x_2^8 + x_3^8.$$

En regroupant ces informations, on obtient

$$\det Q'' \leq (Q''_{11} Q''_{22} - Q''_{12}{}^2) Q''_{33} \leq -(x_1^8 + x_2^8 + x_3^8) (x_1^4 + x_2^4 + 18x_3^4) \\ < 0, \quad \text{si } x \neq 0.$$

Pour $\lambda \geq 2$, on a, avec $\mu = 30(\lambda - 2)$.

$$\det P''_\lambda = -\mu^3 x_1^4 x_2^4 x_3^4 + \mu^2 (x_1^4 x_2^4 Q''_{33} - x_1^4 x_3^4 Q''_{22} - x_2^4 x_3^4 Q''_{11}) \\ + \mu (x_1^4 (Q''_{22} Q''_{33} - Q''_{23}{}^2) + x_2^4 (Q''_{11} Q''_{33} - Q''_{13}{}^2) - x_3^4 (Q''_{11} Q''_{22} - Q''_{12}{}^2)) \\ + \det Q''.$$

Comme tous les coefficients de ce polynôme en μ sont négatifs ou nuls, le déterminant de P''_λ est négatif pour $\lambda \geq 2$ et $x \neq 0$. Il reste à observer que $P''_\lambda(0, 0, 1) = \text{diag}(2, 2, -30(\lambda + 1))$ pour pouvoir conclure que P_λ appartient à $H_{1,2}^{(6)}$. \square

L'exemple générique suivant est plus facile à calculer.

(2.7) EXEMPLE. Pour tout $k \geq 2$ et quels que soient $n \geq p \geq 0$, le polynôme

$$P(x) = -(x_1^2 + \dots + x_p^2)^{k+1} + \varepsilon (x_1^2 + \dots + x_p^2)^k (x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2) \\ - \varepsilon (x_1^2 + \dots + x_p^2) (x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2)^k + (x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2)^{k+1}$$

appartient à $H_{p,q}^{(2k+2)}$ si $\varepsilon > 0$ est assez petit.

Preuve. Puisque P est invariant par toute transformation linéaire qui conserve $(x_1^2 + \dots + x_p^2)$ et $(x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2)$, d'après (3), il suffit de vérifier que

$$\det P''(x_1, 0, \dots, 0, x_n) \neq 0 \quad \text{pour} \quad (x_1, x_n) \neq (0, 0).$$

Mais quand $x = (x_1, 0, \dots, 0, x_n)$ les seules entrées non nulles de P'' sont

$$P''_{11} = - (2k + 2) (2k + 1) x_1^{2k} + 2\varepsilon k (2k - 1) x_1^{2k-2} x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$

$$P''_{22} = \dots = P''_{pp} = - 2(k + 1) x_1^{2k} + 2\varepsilon k x_1^{2k-2} x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$

$$P''_{p+1,p+1} = \dots = P''_{n-1,n-1} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k x_1^2 x_n^{2k-2} + 2(k + 1) x_n^{2k}.$$

$$P''_{nn} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k (2k - 1) x_1^2 x_n^{2k-2} + (2k + 2) (2k + 1) x_n^{2k}$$

$$P''_{1n} = P''_{n1} = 4\varepsilon k (x_1^{2k-1} x_n - x_1 x_n^{2k-1}).$$

Par conséquent, en $(x_1, 0, \dots, 0, x_n)$,

$$\det P'' = (P''_{11} P''_{nn} - (P''_{1n})^2) P''_{22} \dots P''_{n-1,n-1}.$$

Pour ε assez petit on vérifie que $P''_{11}, \dots, P''_{pp}$ sont négatifs et $P''_{p+1,p+1}, \dots, P''_{nn}$ sont positifs pour $(x_1, 0, \dots, 0, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ (cette affirmation est fautive pour $k = 1$, puisque dans ce cas $P''_{11} = -12x_1^2$ s'annule pour $x \neq 0$). Il s'ensuit que P'' a p valeurs propres négatives et q valeurs propres positives si $x \neq 0$. \square

3. ENONCÉS DES RÉSULTATS

(3.1) THÉORÈME. *Supposons $m, n \geq 2$, $p = 0, \dots, n$, $q = n - p$. Alors l'ensemble $H_{p,q}^m$ est non vide si, et seulement si l'une des conditions suivantes a lieu:*

- a) m est impair et $p = q = 1$;
- b) $m = 2$;
- c) $m = 4$ et $p = q = 1$ ou $p = 0$ ou $q = 0$;
- d) m est pair supérieur ou égal à 6.

(3.2) APPLICATION. *Pour m pair ≥ 6 , $n \geq 2$ et $p = 0, \dots, n$, il existe une hypersurface régulière M de classe C^∞ de \mathbf{R}^{n+1} contenant 0 telle que la courbure de Gauss-Kronecker $K(x)$ de M en x vérifie*

$$(i) \quad K(x) \sim |x|^{n(m-2)}, \quad x \rightarrow 0.$$

(ii) *L'hypersurface M a p rayons de courbure principaux négatifs et q rayons de courbure principaux positifs en tout point voisin de 0.*

Il n'existe pas d'hypersurface avec ces propriétés si $m = 4$ et $p \neq 0$ et n .

(3.3) THÉORÈME. *Soit $P \in H_{p,q}^{(m)}$ avec $m \geq 2$ et $n = p + q \geq 3$. Alors les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de P ont les mêmes*