Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES HOMOGÈNES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE

Autor: Maire, H.-M.

Kapitel: 2. Exemples et cas particuliers

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59491

$h \mapsto \langle P''(x)h \mid h \rangle$ est constant pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, car $n \geqslant 2$. Pour $0 \leqslant p \leqslant n$ et $q = n - p$, soit

$$H_{p,q}^{(m)} = \{P \in H_n^{(m)} \mid \operatorname{ind} P''(x) = p,\ \forall x \neq 0\} .$$

On a bien sûr: $H_n^{(m)} = \cup_{p=0}^n H_{p,q}^{(m)}$.

Quand $m = 2$, l'ensemble $H_{p,q}^{(2)}$ s'identifie à l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées d'indice p sur $\mathbf{R}^n$. Mais si m est supérieur à 2, il n'est pas immédiat de trouver un polynôme homogène de degré m satisfaisant à (1), avec hessien *indéfini*. Les polynômes *harmoniques* sont de bons candidats si n est égal à 2 (cf. Exemple (2.1)), mais pas en dimension supérieure. En effet, H. Lewy [6], puis B. Segre [9] et V.E. Galafassi [4] ont montré qu'il n'existe pas de polynôme harmonique dans $H_n^{(m)}$ si $m > 2$ et $n > 2$.

Dans cet article, nous répondons aux questions suivantes:

Pour quelles valeurs de m, p et q, l'ensemble $H_{p,q}^{(m)}$ est-il non vide?

Pour P dans $H_{p,q}^{(m)}$, quel est le nombre de composantes connexes de $P^{-1}(0) \setminus \{0\}$?

Quels sont les nombres de Betti des variétés de niveaux de $P: \{P = \alpha\}$, respectivement des variétés de sous-niveaux de $P: \{P \leqslant \alpha\}$?

L'étude de $H_{p,q}^{(m)}$ est motivée par les résultats de Helffer-Nourrigat et de l'auteur sur l'hypoellipticité maximale du système de Cauchy-Riemann induit sur une hypersurface de $\mathbf{C}^{n+1}$, cf. [5] et [7]. Il est facile de vérifier que si $P \in H_{p,q}^{(m)}$ et $p, q \neq j$ alors l'hypersurface tubulaire de $\mathbf{C}^{n+1}$ définie par $\operatorname{Re} z_0 = P(\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n)$ satisfait la condition de Derridj $D(j)$ qui est nécessaire pour l'hypoellipticité maximale de $\bar{\partial}_b$ sur les $(0, j)$-formes. La connectivité des sous-niveaux de P est utile pour montrer que $D(j)$ est aussi suffisante.

Le plan de l'article est le suivant. Au paragraphe 2, une liste d'exemples ou contre-exemples simples illustre les différents cas exceptionnels: $n = 2$, $p = 0$ ou $m = 4$ et génériques: $m \geqslant 6$. Les résultats principaux sont énoncés au paragraphe 3 et démontrés au paragraphe 4.

2. Exemples et cas particuliers

(2.1) Exemple. *Pour $m \geqslant 2$ le polynôme $P(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^m$ appartient à $H_{1,1}^{(m)}$*

Preuve. Si $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann donnent

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} f = -\operatorname{Im}\frac{df}{dz},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}\frac{df}{dz}$$

et, par suite,

$$\det(\operatorname{Re} f)'' = -\left|\frac{d^2 f}{dz^2}\right|^2 .$$

Quand $f(z) = z^m$, le déterminant hessien de $\operatorname{Re} f$ est donc négatif, sauf en $z = 0$. □

(2.2) EXEMPLE. *$P(x) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^k$, pour $k \geqslant 1$, appartient à $H_{0,n}^{(2k)}$.*

Preuve. Par calcul direct, on trouve que $P''(x)$ vaut $2k\,|x|^{2k-4}$ fois

$$\begin{pmatrix} (2k-1)x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 & (2k-2)x_1x_2 & \cdots \\ (2k-2)x_1x_2 & x_1^2 + (2k-1)x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} .$$

Si $x = (1, 0, \dots, 0)$, cette matrice est diagonale de valeurs propres $2k(2k-1)$, $2k, \dots, 2k$. Comme P est invariant par toute transformation orthogonale et comme

(3) $\qquad U \in GL(n, \mathbf{R}) \Rightarrow U^t P''(Ux)U = (P \circ U)''(x)\,, \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n\,,$

les valeurs propres de $P''(x)$ sont

$$2k(2k-1)\,|x|^{2k-2}, 2k\,|x|^{2k-2}, \dots, 2k\,|x|^{2k-2} . \quad \square$$

(2.3) LEMME. *Pour m impair supérieur à 2, on a:*

$$H_{0,2}^{(m)} = H_{2,0}^{(m)} = \varnothing .$$

Preuve. Soit P un polynôme homogène de degré m et dénotons par $a \in \mathbf{S}^1$ (sphère unité de $\mathbf{R}^2$) un point où P atteint son maximum sur $\mathbf{S}^1$. La méthode des multiplicateurs de Lagrange et la relation d'Euler montrent que $P'(a) = mP(a)a$. Une seconde application de la relation d'Euler donne

$$P''(a)a = (m-1)P'(a) = m(m-1)P(a)a .$$

Ainsi a est vecteur propre de $P''(a)$ avec valeur propre $m(m-1)P(a)$. Si P appartient à $H_{2,0}^{(m)}$ alors cette valeur propre est négative et, par suite, $P(a)$ est négatif. Il s'ensuit que P est négatif en dehors de 0, donc m est pair. □

(2.4) PROPOSITION (A. Andreatta [1]). *Si* $k \geqslant 1$ *et* $n \geqslant 3$, *alors* $H_n^{(2k+1)} = \varnothing$.

Preuve. Si P est un polynôme homogène de degré impair alors P' est une application homogène de degré pair; elle est donc non injective. D'après la proposition (4.1), il s'ensuit que $P \notin H_n^{(2k+1)}$. $\square$

(2.5) EXEMPLE. *L'ensemble* $H_{2,2}^{(4)}$ *ne contient pas de polynôme du type suivant:*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant 4} a_{jk} x_j^2 x_k^2 .$$

Preuve. Soit P un polynôme de ce type appartenant à $H_4^{(4)}$. Alors $P''(x)$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 12a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_2^2 + 2a_{13}x_3^2 + 2a_{14}x_4^2 & \cdots & 4a_{14}x_1x_4 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 4a_{14}x_1x_4 & \cdots & 2a_{14}x_1^2 + 2a_{24}x_2^2 + 2a_{34}x_3^2 + 12a_{44}x_4^2 \end{pmatrix} .$$

Quand $x_4 = 0$, le déterminant de $P''(x)$ est un multiple de $Q(x_1, x_2, x_3) := 2a_{14}x_1^2 + 2a_{24}x_2^2 + 2a_{34}x_3^2$; d'après (1), la forme quadratique Q doit être définie et donc a_{14}, a_{24} et a_{34} ont le même signe. D'autre part, pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et $x_4 = 1$, les valeurs propres de $P''(x)$ sont $2a_{14}, 2a_{24}, 2a_{34}$ et $12a_{44}$. Donc l'indice de $P''(0, 0, 0, 1)$ est différent de 2 et, par suite, le polynôme P n'appartient pas à $H_{2,2}^{(4)}$. $\square$

Remarque. Il est facile de trouver des polynômes homogènes de degré pair dont la matrice hessienne a p valeurs propres $\leqslant 0$ et q valeurs propres $\geqslant 0$. En effet, $P(x) = -x_1^{2k} - \ldots - x_p^{2k} + x_{p+1}^{2k} + \ldots + x_n^{2k}$ pour k entier $\geqslant 1$ convient. Mais dès que k est supérieur à 1, $P \notin H_n^{(2k)}$. Une légère modification de cet exemple fournit un élément de $H_{1,2}^{(6)}$.

(2.6) EXEMPLE (A. Andreatta [2]). *Le polynôme*

$$P_\lambda = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \lambda(x_1^6 + x_2^6 - x_3^6)$$

appartient à $H_{1,2}^{(6)}$ *pour* $\lambda \geqslant 2$.

Preuve. Soit $Q = P_2$. On a

$$Q''_{11} = 90x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 2x_2^4 - 12x_1^2x_3^2 + 2x_3^4,$$
$$Q''_{22} = 2x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 90x_2^4 - 12x_2^2x_3^2 + 2x_3^4,$$
$$Q''_{33} = -2x_1^4 - 2x_2^4 + 12x_1^2x_3^2 + 12x_2^2x_3^2 - 90x_3^4,$$
$$Q''_{12} = 8x_1^3x_2 + 8x_1x_2^3 , \quad Q''_{13} = -8x_1^3x_3 + 8x_1x_3^3 , \quad Q''_{23} = -8x_2^3x_3 + 8x_2x_3^3 .$$

Comme $8x_1^2(x_1^2 + x_2^2) \leqslant Q''_{11}$ et $8x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \leqslant Q''_{22}$, on a

$$(\sqrt{8x_1^2(x_1^2 + x_2^2)}\, Q''_{23})^2 \leqslant Q''_{11} Q''^2_{23} \quad \text{et} \quad (\sqrt{8x_2^2(x_1^2 + x_2^2)}\, Q''_{13})^2 \leqslant Q''_{22} Q''^2_{13} .$$

D'après l'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$, il en découle

$$2Q''_{12} Q''_{13} Q''_{23} \leqslant Q''_{11} Q''^2_{23} + Q''_{22} Q''^2_{13} .$$

D'autre part, on vérifie que

$$Q''_{11} \geqslant 54x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4 , \quad Q''_{22} \geqslant 2x_1^4 + 54x_2^4 + x_3^4 ,$$
$$Q''_{33} \leqslant -x_1^4 - x_2^4 - 18x_3^4 ,$$

et, par conséquent,

$$Q''_{11} Q''_{22} - Q''^2_{12} \geqslant x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 .$$

En regroupant ces informations, on obtient

$$\det Q'' \leqslant (Q''_{11} Q''_{22} - Q''^2_{12}) Q''_{33} \leqslant -(x_1^8 + x_2^8 + x_3^8)(x_1^4 + x_2^4 + 18x_3^4)$$
$$< 0 , \quad \text{si} \quad x \neq 0 .$$

Pour $\lambda \geqslant 2$, on a, avec $\mu = 30(\lambda - 2)$.

$$\det P''_\lambda = -\mu^3 x_1^4 x_2^4 x_3^4 + \mu^2(x_1^4 x_2^4 Q''_{33} - x_1^4 x_3^4 Q''_{22} - x_2^4 x_3^4 Q''_{11})$$
$$+ \mu(x_1^4(Q''_{22} Q''_{33} - Q''^2_{23}) + x_2^4(Q''_{11} Q''_{33} - Q''^2_{13}) - x_3^4(Q''_{11} Q''_{22} - Q''^2_{12}))$$
$$+ \det Q'' .$$

Comme tous les coefficients de ce polynôme en μ sont négatifs ou nuls, le déterminant de P''_λ est négatif pour $\lambda \geqslant 2$ et $x \neq 0$. Il reste à observer que $P''_\lambda(0, 0, 1) = \operatorname{diag}(2, 2, -30(\lambda + 1))$ pour pouvoir conclure que P_λ appartient à $H^{(6)}_{1,2}$. □

L'exemple générique suivant est plus facile à calculer.

(2.7) EXEMPLE. *Pour tout* $k \geqslant 2$ *et quels que soient* $n \geqslant p \geqslant 0$, *le polynôme*

$$P(x) = -(x_1^2 + \dots + x_p^2)^{k+1} + \varepsilon(x_1^2 + \dots + x_p^2)^k(x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2)$$
$$- \varepsilon(x_1^2 + \dots + x_p^2)(x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2)^k + (x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2)^{k+1}$$

appartient à $H^{(2k+2)}_{p,q}$ *si* $\varepsilon > 0$ *est assez petit.*

Preuve. Puisque P est invariant par toute transformation linéaire qui conserve $(x_1^2 + \dots + x_p^2)$ et $(x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2)$, d'après (3), il suffit de vérifier que

$$\det P''(x_1, 0, \dots, 0, x_n) \neq 0 \quad \text{pour} \quad (x_1, x_n) \neq (0, 0) .$$

Mais quand $x = (x_1, 0, \dots, 0, x_n)$ les seules entrées non nulles de P'' sont

$$P''_{11} = -(2k+2)(2k+1)x_1^{2k} + 2\varepsilon k(2k-1)x_1^{2k-2}x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$
$$P''_{22} = \dots = P_{pp} = -2(k+1)x_1^{2k} + 2\varepsilon k x_1^{2k-2}x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$
$$P''_{p+1,p+1} = \dots = P_{n-1,n-1} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k x_1^2 x_n^{2k-2} + 2(k+1)x_n^{2k}$$
$$P''_{nn} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k(2k-1)x_1^2x_n^{2k-2} + (2k+2)(2k+1)x_n^{2k}$$
$$P''_{1n} = P''_{n1} = 4\varepsilon k(x_1^{2k-1}x_n - x_1x_n^{2k-1}) .$$

Par conséquent, en $(x_1, 0, \dots, 0, x_n)$,

$$\det P'' = (P''_{11}P''_{nn} - (P''_{1n})^2)P''_{22} \dots P''_{n-1,n-1} .$$

Pour ε assez petit on vérifie que $P''_{11}, \dots, P''_{pp}$ sont négatifs et $P''_{p+1,p+1}, \dots, P''_{nn}$ sont positifs pour $(x_1, 0, \dots, 0, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ (cette affirmation est fausse pour $k = 1$, puisque dans ce cas $P''_{11} = -12x_1^2$ s'annule pour $x \neq 0$). Il s'ensuit que P'' a p valeurs propres négatives et q valeurs propres positives si $x \neq 0$. □

3. Enoncés des résultats

(3.1) Théorème. *Supposons $m, n \geqslant 2$, $p = 0, \dots, n$, $q = n - p$. Alors l'ensemble $H^m_{p,q}$ est non vide si, et seulement si l'une des conditions suivantes a lieu:*

a) *m est impair et $p = q = 1$;*

b) *$m = 2$;*

c) *$m = 4$ et $p = q = 1$ ou $p = 0$ ou $q = 0$;*

d) *m est pair supérieur ou égal à 6.*

(3.2) Application. *Pour m pair $\geqslant 6, n \geqslant 2$ et $p = 0, \dots, n$, il existe une hypersurface régulière M de classe C^∞ de $\mathbf{R}^{n+1}$ contenant 0 telle que la courbure de Gauss-Kronecker $K(x)$ de M en x vérifie*

(i) $K(x) \sim |x|^{n(m-2)}$, $x \to 0$.

(ii) *L'hypersurface M a p rayons de courbure principaux négatifs et q rayons de courbure principaux positifs en tout point voisin de 0.*

Il n'existe pas d'hypersurface avec ces propriétés si $m = 4$ et $p \neq 0$ et n.

(3.3) Théorème. *Soit $P \in H^{(m)}_{p,q}$ avec $m \geqslant 2$ et $n = p + q \geqslant 3$. Alors les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de P ont les mêmes*