

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** POLYNÔMES HOMOGÈNES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE  
**Autor:** Maire, H.-M.  
**Kapitel:** 1. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59491>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# POLYNÔMES HOMOGÈNES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE

par H.-M. MAIRE

RÉSUMÉ. Les niveaux et sous-niveaux d'un polynôme réel homogène de degré  $m \geq 2$  avec gradient à singularité isolée en 0 (i.e., avec hessien non dégénéré) ont la même homologie que les niveaux et sous-niveaux d'une forme quadratique non dégénérée. L'existence de tels polynômes pour  $m$  pair  $\geq 6$  avec hessien d'indice quelconque est établie. On montre par contre que le hessien de tout polynôme homogène de degré 4 en au moins 3 variables dont l'indice est différent de 0 et  $n$  en un point, dégénère en dehors de l'origine.

## 1. INTRODUCTION

Pour deux entiers  $m, n \geq 2$ , soit  $H_n^{(m)}$  l'ensemble des polynômes réels  $P$  à  $n$  variables, homogènes de degré  $m$  dont le gradient  $P': \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  a une singularité isolée en 0, en d'autres termes, tels que la matrice hessienne

$$P''(x) = \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right)_{1 \leq j, k \leq n}$$

est non dégénérée pour tout  $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ , c'est-à-dire

$$(1) \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \det P''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Si  $P$  appartient à  $H_n^{(m)}$ , la relation d'Euler  $P''(x)x = (m-1)P'(x)$  donne

$$(2) \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

donc  $P$  a aussi une singularité isolée en 0. De plus, l'indice de Morse  $\text{ind } P''(x)$  (= nombre de valeurs propres négatives) de la forme quadratique

$h \mapsto \langle P''(x)h | h \rangle$  est constant pour  $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ , car  $n \geq 2$ . Pour  $0 \leq p \leq n$  et  $q = n - p$ , soit

$$H_{p,q}^{(m)} = \{P \in H_n^{(m)} \mid \text{ind } P''(x) = p, \forall x \neq 0\}.$$

On a bien sûr:  $H_n^{(m)} = \bigcup_{p=0}^n H_{p,q}^{(m)}$ .

Quand  $m = 2$ , l'ensemble  $H_{p,q}^{(2)}$  s'identifie à l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées d'indice  $p$  sur  $\mathbf{R}^n$ . Mais si  $m$  est supérieur à 2, il n'est pas immédiat de trouver un polynôme homogène de degré  $m$  satisfaisant à (1), avec hessien *indéfini*. Les polynômes *harmoniques* sont de bons candidats si  $n$  est égal à 2 (cf. Exemple (2.1)), mais pas en dimension supérieure. En effet, H. Lewy [6], puis B. Segre [9] et V.E. Galafassi [4] ont montré qu'il n'existe pas de polynôme harmonique dans  $H_n^{(m)}$  si  $m > 2$  et  $n > 2$ .

Dans cet article, nous répondons aux questions suivantes:

*Pour quelles valeurs de  $m, p$  et  $q$ , l'ensemble  $H_{p,q}^{(m)}$  est-il non vide?*

*Pour  $P$  dans  $H_{p,q}^{(m)}$ , quel est le nombre de composantes connexes de  $P^{-1}(0) \setminus \{0\}$ ?*

*Quels sont les nombres de Betti des variétés de niveaux de  $P: \{P = \alpha\}$ , respectivement des variétés de sous-niveaux de  $P: \{P \leq \alpha\}$ ?*

L'étude de  $H_{p,q}^{(m)}$  est motivée par les résultats de Helffer-Nourrigat et de l'auteur sur l'hypoellipticité maximale du système de Cauchy-Riemann induit sur une hypersurface de  $\mathbf{C}^{n+1}$ , cf. [5] et [7]. Il est facile de vérifier que si  $P \in H_{p,q}^{(m)}$  et  $p, q \neq j$  alors l'hypersurface tubulaire de  $\mathbf{C}^{n+1}$  définie par  $\text{Re } z_0 = P(\text{Re } z_1, \dots, \text{Re } z_n)$  satisfait la condition de Derridj  $D(j)$  qui est nécessaire pour l'hypoellipticité maximale de  $\bar{\partial}_b$  sur les  $(0, j)$ -formes. La connectivité des sous-niveaux de  $P$  est utile pour montrer que  $D(j)$  est aussi suffisante.

Le plan de l'article est le suivant. Au paragraphe 2, une liste d'exemples ou contre-exemples simples illustre les différents cas exceptionnels:  $n = 2$ ,  $p = 0$  ou  $m = 4$  et génériques:  $m \geq 6$ . Les résultats principaux sont énoncés au paragraphe 3 et démontrés au paragraphe 4.

## 2. EXEMPLES ET CAS PARTICULIERS

(2.1) EXEMPLE. Pour  $m \geq 2$  le polynôme  $P(x, y) = \text{Re}(x + iy)^m$  appartient à  $H_{1,1}^{(m)}$

*Preuve.* Si  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  est une fonction holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann donnent