

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN  
**Autor:** Brägger, Walter  
**Kapitel:** 5. Randwinkel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59490>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 5. RANDWINKEL

Sei  $\psi \in W_{\text{Koh}}$  und  $e \in E_{\text{Rand}}$  eine Randecke. Dann ist

$$\rho(\psi, e) = \sum_{s \in S} (e, s) \psi(s) \geq 0$$

der Randwinkel von  $\psi$  an der Ecke  $e$ . Es gilt:

$$\sum_{s \in S} \psi(s) = \pi(\#\Delta) = 2\pi(\#E_{\text{In}}) + \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} \rho(\psi, e)$$

Aus  $\#\Delta - \#K + \#E = 1$  folgt:

$$\begin{aligned} -2\pi &= \pi(-1 + \underbrace{2\#\Delta - \#E_{\text{In}} - \#K}_{= -1 + \#K}) = \pi(\#\Delta - \#E - \#E_{\text{In}}) \\ &= \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\rho(\psi, e) - \pi) \end{aligned}$$

und somit erhalten wir eine Version von Gauss-Bonnet:

$$2\pi = \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\pi - \rho(\psi, e))$$

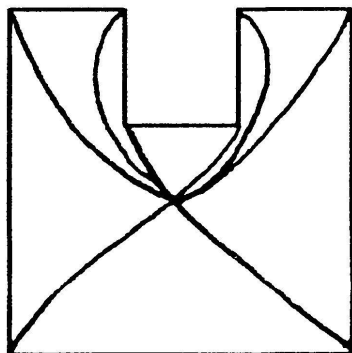
5.1. POLYEDER MIT FESTEN RANDWINKELN. Die Funktion  $\rho: E_{\text{Rand}} \mapsto \mathbf{R}_+$  ist ein *Randwinkelsystem*, wenn gilt

$$2\pi = \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\pi - \rho(e)).$$

Ist  $\rho$  ein Randwinkelsystem, dann ist

$$W_{\text{Koh}}^{\rho} := \{\psi \in W_{\text{Koh}} \mid \rho(\psi, e) = \rho(e), \quad \forall e \in E_{\text{Rand}}\}.$$

Obwohl nach dem Satz von Fary die Menge  $\overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}$  nicht leer ist, kann  $\overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}^{\rho}$  durchaus leer sein. Die Triangulation von Figur 12 etwa kann nicht geradlinig realisiert werden, wenn wir die Randwinkel fest lassen.



FIGUR 12

5.2. SATZ. Sei  $\rho: E_{\text{Rand}} \mapsto \mathbf{R}_+$  ein Randwinkelsystem und sei  $\overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}^{\rho}$  nicht leer. Dann gibt es genau eine immensierte Kreispackung  $\eta \in W_{\text{Koh}}^{\rho}$ . Das Polyeder  $P_{\eta}$  ist in  $\mathbf{E}$  eingebettet, wenn  $\rho(e) \leq \pi, \forall e \in E_{\text{Rand}}$ .

*Beweis.* Der Raum  $W_{\text{Koh}}^{\rho}$  ist eine kompakte, konvexe Teilmenge von  $W$ . Für  $\psi \in \overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}^{\rho}$  ist sein Tangentialraum  $T_{\psi} W_{\text{Koh}}^{\rho}$  unabhängig von  $\psi$ . Es gilt:

$$(8) \quad T_{\psi} W_{\text{Koh}}^{\rho} = \left\{ v \in \mathbf{R}^S \left| \begin{array}{l} \sum_{s \in S} (d, s)v(s) = 0, \quad \forall d \in \Delta \\ \text{und} \\ \sum_{s \in S} (e, s)v(s) = 0, \quad \forall e \in E \end{array} \right. \right\}$$

Nach Lemma 2.3. hat  $W_{\text{Koh}}^{\rho}$  die Dimension  $1 + 2 \# \Delta - \# E = \# K_{\text{In}}$ , wobei die letzte Gleichheit wieder mit Induktion über die Anzahl Dreiecke folgt.

Für jede innere Kante  $k$  ist der Vektor  $t_k$  Tangentialvektor von  $W_{\text{Koh}}^{\rho}$ . Nach Lemma 2.5. spannen diese den Tangentialraum  $T_{\psi} W_{\text{Koh}}^{\rho}$  auf.

Sei  $L_{\text{Koh}}^{\rho}$  die Einschränkung von  $L$  auf  $W_{\text{Koh}}^{\rho}$ . Dann hat wegen Lemma 3.4. die konkave Funktion  $L_{\text{Koh}}^{\rho}$  genau einen kritischen Punkt  $\eta$ . Da  $(DL_{\text{Koh}}^{\rho})_{\eta}(t_k) = 0, \forall k \in K_{\text{In}}$ , ist  $\eta$  wegen Lemma 4.3. eine immensierte Kreispackung.  $\square$

#### LITERATUR

- [An] ANDREEV, E.M. On convex polyhedra in Lobacevskii spaces. *Mat. USSR Sbornik* 10 (1970), 413-440.
- [Cv1] COLIN DE VERDIÈRE, Yves. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Inventiones math.* 104 (1991), 655-669.
- [Cv2] ——— Comment rendre géodésique une triangulation d'une surface. *Enseignement Math.* 37 (1991), 201-212.
- [Fa] FARY, I. On straight line representation of planar graphs. *Scientiarium Mathematicarum (Acta Universitatis Szegedensis)* 11 (1946-1948), 229-233.
- [Mi] MILNOR, J.W. Hyperbolic geometry: the first 150 years. *Bull. A.M.S.* 6 (1982), 9-24.
- [Tu] THURSTON, William P. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Princeton Notes (1978), chap. 13.

(Reçu le 18 mars 1991)

Walter Brägger

Mathematisches Institut  
Rheinsprung 21  
CH-4051 Basel