

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN
Autor: Brägger, Walter
Kapitel: 4. IMMERSIERTE KREISPACKUNGEN
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59490>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

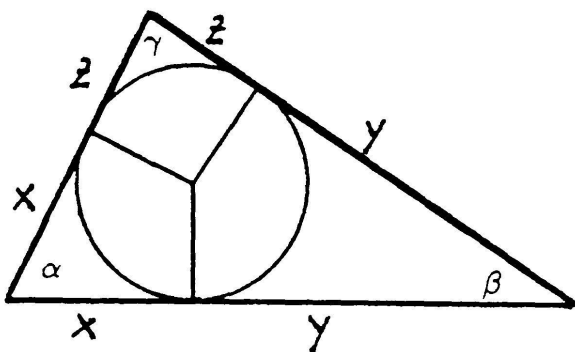
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

4. IMMERSIERTE KREISPACKUNGEN

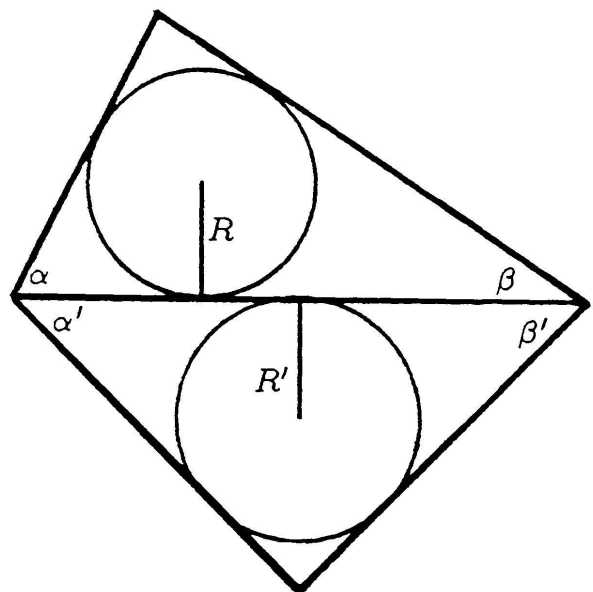
4.1. Satz 3.6. besagt, dass L_{Koh} auf W_{Koh} genau einen kritischen Punkt η annimmt. Da die Vektoren $\{t_k | k \in K\}$ den Tangentialraum $T_\eta W_{Koh}$ aufspannen, ist $\eta \in W_{Koh}$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn $(DL_{Koh})_\eta(t_k) = 0, \forall k \in K$. Ist k eine Kante von P und $\eta \in W_{Koh}$ können wir die Blume um k , d.h. die Vereinigung aller Dreiecke in welchen k enthalten ist, geometrisch realisieren.

Bemerkung. Drei Grössen a, b, c , welche die Dreiecksungleichungen erfüllen, definieren bis auf Kongruenz genau ein euklidisches Dreieck. Sei $x = (-a + b + c)/2, y = (+a - b + c)/2$ und $z = (+a + b - c)/2$. Dann ist $a = y + z, b = x + z, c = y + x$ und wegen den Dreiecksungleichungen sind x, y und z positiv. Umgekehrt definieren drei positive Grössen x, y und z bis auf Kongruenz genau ein euklidisches Dreieck. Der Inkreis eines Dreiecks teilt die Seiten gerade im Verhältnis $x/y, y/z$ und z/x (siehe Figur 7).

Sei zuerst $k \in K_{in}$ eine innere Kante. Realisieren wir die Blume um k in \mathbf{E} , erhalten wir zwei Dreiecke d_η und d'_η mit gemeinsamer Kante $|k|$ und den Winkeln α, β, γ bzw. α', β', γ' . Die Inkreise der Dreiecke d_η und d'_η teilen die Kante $|k|$ im Verhältnis x/y und x'/y' . Sind R und R' die Inkreise der Dreiecke d_η und d'_η so folgt (siehe Figur 8):



FIGUR 7



FIGUR 8

Zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante

$$\begin{aligned}
 0 &= (DL_{Koh})_\eta(t_k) \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} L(\eta + \varepsilon t_k) \Big|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log \tan \frac{\alpha}{2} - \log \tan \frac{\beta}{2} - \log \tan \frac{\alpha'}{2} + \log \tan \frac{\beta'}{2} \\
&= \log \frac{R}{x} - \log \frac{R}{y} - \log \frac{R'}{x'} + \log \frac{R'}{y'} \\
&= -\log \frac{x}{y} + \log \frac{x'}{y'},
\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}.$$

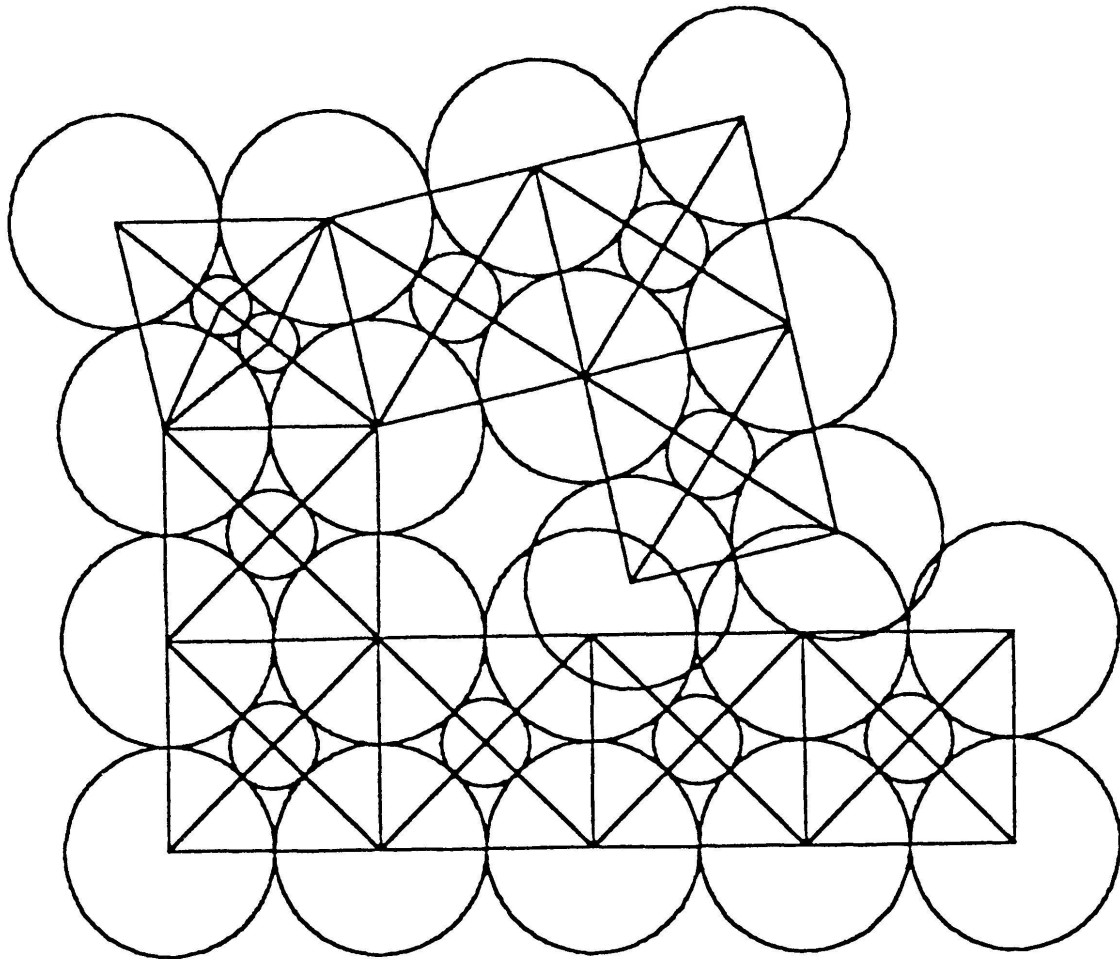
Realisieren wir in \mathbf{E} die beiden an k anliegenden Dreiecke mit gemeinsamer Kante $|k|$, so ist $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k)$ genau dann null, wenn sich die Inkreise der beiden Dreiecke berühren. Somit ist $x = x', y = y'$ und da $R = x \cdot \tan(\alpha/2)$ gilt für die Inkreise R und R'

$$\frac{R}{R'} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha'}{2}}.$$

Ist $k \in K_{\text{Rand}}$ eine Randkante, so liegt k nur in einem Dreieck d . Realisieren wir d in \mathbf{E} , dann teile der Inkreisradius $|k|$ wieder im Verhältnis x/y . Aus $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0$ folgt dann $x/y = 1$. Der Inkreis teilt somit $|k|$ im Verhältnis 1:1.

4.2. Wir nennen $\psi \in W_{\text{Koh}}$ eine *immersierte Kreispackung* (siehe Figur 9) wenn ψ in W_{Geo} liegt und folgende Bedingungen erfüllt:

- Um jeden Eckpunkt e von P_ψ (Bezeichnungen wie in 2.7.) lässt sich ein Kreis C_e schlagen, der alle Kanten, die von e ausgehen, schneidet.
- Sind zwei Ecken e und e' durch eine Kante verbunden, so sollen sich die Kreise C_e und $C_{e'}$ berühren.



FIGUR 9

Beispiel einer immersierten Kreispackung

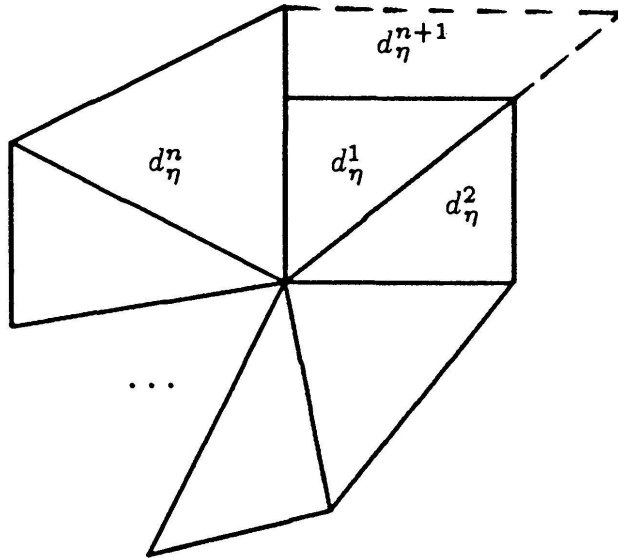
4.3. LEMMA. Für $\eta \in W_{\text{Koh}}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) η ist eine immersierte Kreispackung,
- (ii) $(DL_{\text{Koh}})_{\eta}(t_k) = 0, \forall k \in K_{\text{In}}$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Sei η eine immersierte Kreispackung. Dann schneiden die Kreise C_e die Seiten der Dreiecke von P_{η} in den Berührungspunkten der Inkreise. Haben zwei Dreiecke von P_{η} eine gemeinsame Kante $|k|$, so fallen auf $|k|$ die Berührungspunkte der Inkreise zusammen und es folgt $(DL_{\text{Koh}})_{\eta}(t_k) = 0$.

(ii) \Rightarrow (i): Sei e ein innerer Eckpunkt und seien d^1, \dots, d^n die Dreiecke der Blume um e wobei d^i und d^{i+1} die Kante k_i gemeinsam haben. Wir realisieren erst d^1 in \mathbf{E} . Dann realisieren wir die Dreiecke d^2, \dots, d^n so, dass d_{η}^i mit d_{η}^{i-1} genau die Kante $|k_{i-1}|$ gemeinsam hat.

Sei d_η^{n+1} eine weitere Realisierung von d^1 , welche aber mit d_η^n die Kante $|k_n|$ gemeinsam hat. Da die Winkelsumme um jeden Eckpunkt 2π beträgt, haben die Dreiecke d_η^n und d_η^{n+1} keinen inneren Punkt gemeinsam (siehe Figur 10).



FIGUR 10

Die Blume um einen inneren Eckpunkt

Wegen $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_{k_i}) = 0$ berühren sich die Inkreise der Dreiecke d_η^i und d_η^{i+1} . Bezeichnen wir mit R_i den Inkreisradius des Dreiecks d_η^i und mit α_i den Winkel von d_η^i der an die Ecke e stösst, dann folgt

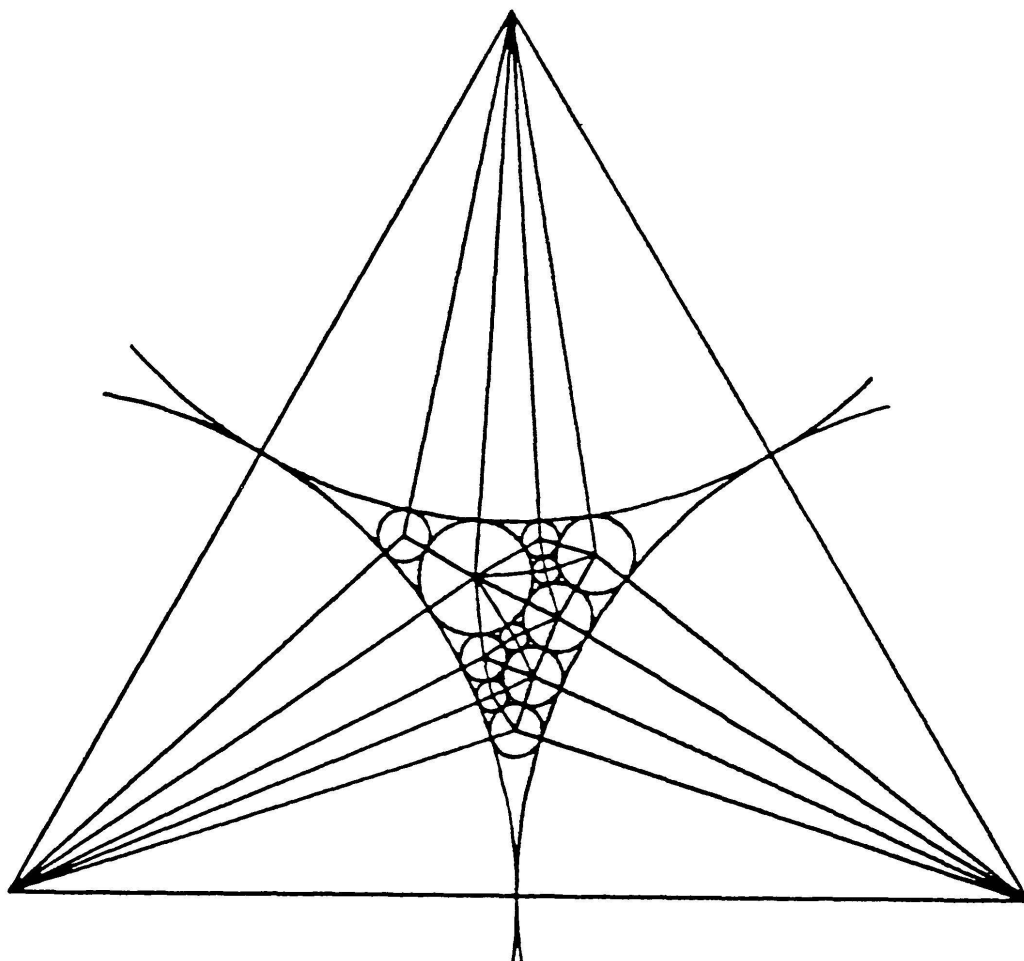
$$\frac{R_1}{R_{n+1}} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_3} \cdots \frac{R_n}{R_{n+1}} = \frac{\tan(\alpha_1/2)}{\tan(\alpha_2/2)} \cdots \frac{\tan(\alpha_n/2)}{\tan(\alpha_1/2)} = 1.$$

Folglich fallen die Dreiecke d_η^1, d_η^{n+1} zusammen und die Blume um e schliesst sich. Da sich die Blume um jeden inneren Eckpunkt schliesst, ist η immersiert realisierbar. Haben zwei Dreiecke eine gemeinsame Kante, so berühren sich in $P_\eta \subset \mathbf{E}$ ihre Inkreise. Wir können somit um jeden Eckpunkt von P_η einen Kreis schlagen, der die Kanten in den Berührungspunkten der Inkreise schneidet. Diese Kreise erfüllen die Kreispackungseigenschaft 4.2. \square

4.4. SATZ. Für jedes Polyeder P mit $|P|$ homöomorph zur Kreisscheibe existiert genau eine immersierte Kreispackung, bei der alle Randkreise gleich gross sind.

Beweis. Nimmt L_{Koh} das Maximum auf W_{Koh} in η an, so gilt $(DL_{\text{Koh}})_{\eta}(t_k) = 0 \forall k \in K$, nur für η . Aus $(DL_{\text{Koh}})_{\eta}(t_k) = 0, \forall k \in K_{\text{In}}$ folgt die Kreispackungseigenschaft und wegen $(DL_{\text{Koh}})_{\eta}(t_k) = 0 \forall k \in K_{\text{Rand}}$ sind alle Randkreise gleich gross. \square

4.5. BEWEIS DES SATZES VON ANDREEV. Sei T eine Triangulierung der Sphäre S^2 und e_1, e_2, e_3 die Eckpunkte eines Dreiecks von T . Die Gruppe der Möbiustransformationen operiert dreifachtransitiv auf der Sphäre. Mit einer Möbiustransformation und anschliessender stereographischer Projektion können wir e_1, e_2, e_3 auf die Eckpunkte eines gleichseitigen euklidischen Dreiecks so abbilden, dass alle andern Ecken von T im Inneren dieses Dreiecks liegen. Wir erhalten so eine Triangulierung eines gleichseitigen Dreiecks in \mathbf{E} . Nach Satz 4.4. existiert dann genau eine immersierte Kreispackung, deren Graphen das 1-Skelett einer Triangulierung eines wiederum gleichseitigen Dreiecks ist (alle drei Randkreise haben denselben Radius). Darum ist diese Kreispackung sogar in \mathbf{E} eingebettet (siehe Figur 11). Transformieren wir auf S^2 zurück erhalten wir eine Kreispackung auf der Sphäre. Die Eindeutigkeit bis auf Möbiustransformation folgt aus der Eindeutigkeit im euklidischen Fall.



FIGUR 11

Kreispackung auf der Sphäre