Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN
Autor: Brägger, Walter
Kapitel: 2. VORBEREITUNGEN
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59490

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

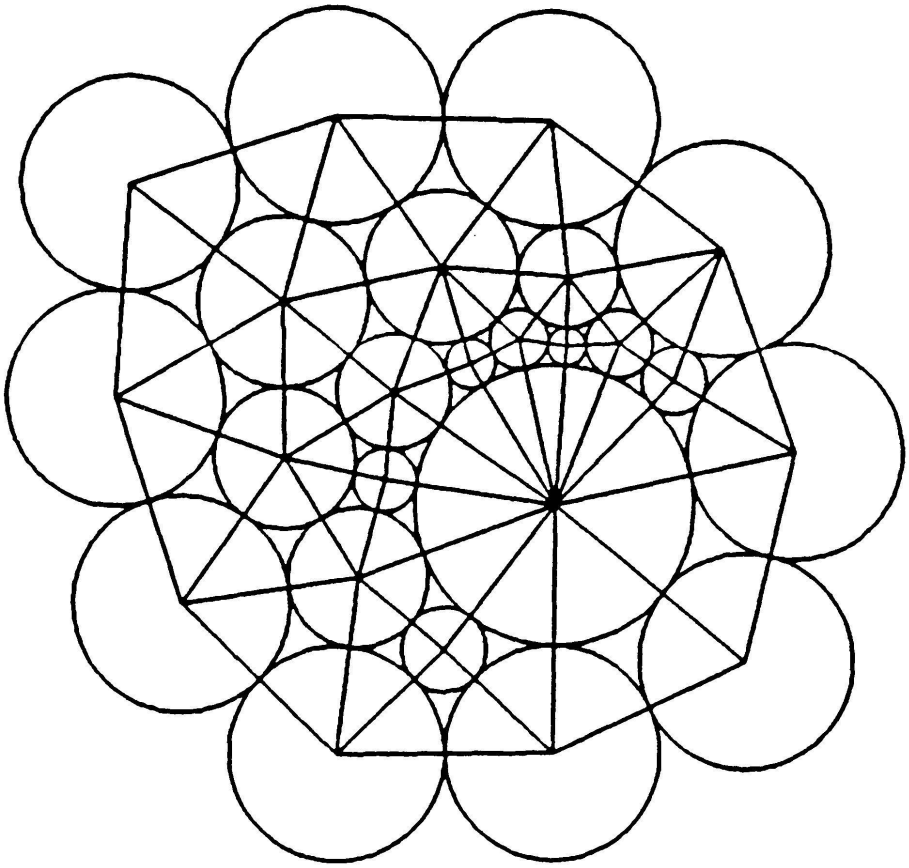
Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Untersucht man diese Funktionale, stösst man rasch auf die Lobachevsky-Funktion und damit auf das Volumen hyperbolischer 3-Simplices.

Im folgenden wollen wir den Satz von Andreev beweisen, indem wir Kreispackungen als Maxima konkaver Funktionale auf $W = [0, \pi]^S$ (S = Sektorenmenge von T) interpretieren.



FIGUR 1

Beispiel einer Kreispackung

2. VORBEREITUNGEN

2.1. Sei P ein Polyeder, dessen Standard-Realisierung $|P|$ in $\mathbf{R}^E$ homöomorph zu einer Kreisscheibe ist. Seien $E = E(P)$, $K = K(P)$, $\Delta = \Delta(P)$ die Mengen aller *Eckpunkte* (0-Simplices), *Kanten* (1-Simplices) und *Dreiecke* (2-Simplices) von P. Jedes 2-Simplex hat drei Winkelsektoren, im folgenden

Sektoren genannt. Sei $S = S(P)$ die Menge der Sektoren aller Dreiecke von P. Für $d \in \Delta, s \in S$ und $e \in E$ definieren wir noch die Inzidenzzahlen

$$(d, s) := \begin{cases} 1 & \text{wenn der Sektor } s \text{ im Dreieck } d \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(e, s) := \begin{cases} 1 & \text{wenn der Sektor } s \text{ an die Ecke } e \text{ stösst} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Wir nennen $k \in K$ eine *Randkante*, wenn k nur in einem Dreieck enthalten ist, sonst eine *innere Kante*. Sei K_{Rand} die Menge der Rand- und K_{In} jene der inneren Kanten. Entsprechend nennen wir diejenigen Eckpunkte, welche in einer Randkante liegen, *Randecken*, die restlichen *innere Eckpunkte*. Seien $E_{\text{Rand}} \subset E$ und $E_{\text{In}} \subset E$ die Mengen der Rand- bzw. inneren Eckpunkte.

Ein Polyeder P wie oben definiert eine topologische Triangulierung der Kreisscheibe. Jede solche Triangulierung können wir aber auch geradlinig realisieren. Es gilt der folgende Satz (siehe [Fa]):

SATZ VON FARY. *Zu jeder topologischen Triangulierung T der Kreisscheibe gibt es eine geodätische Triangulierung T' eines Polygons in* $\mathbf{E}$, *so dass die 1-Skelette von T und T' kombinatorisch äquivalent sind.*

2.2. Für ein Polyeder P mit $|P|$ homöomorph zur Kreisscheibe sei $W = [0, \pi]^S$ der Raum der Abbildungen $\psi : S \mapsto [0, \pi]$. Damit ist W eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbf{R}^S$.

Wir betrachten eine Realisierung von P, wie im Satz von Fary, und bezeichnen den Winkel des Sektors s in dieser Realisierung mit $\psi(s)$. Dann ist die Abbildung $s \mapsto \psi(s)$ ein Element von W mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\sum_{s \in S} (d, s)\psi(s) = \pi , \qquad \forall d \in \Delta \\ &\sum_{s \in S} (e, s)\psi(s) = 2\pi , \qquad \forall e \in E_{\text{In}} . \end{aligned}$$

Erfüllt ein $\psi \in W$ das Gleichungssystem (1), nennen wir ψ ein *kohärentes Winkelsystem*. Sei W_{Koh} die Menge dieser Winkelsysteme. Die Räume W und W_{Koh} sind kompakte, konvexe Teilmengen von $\mathbf{R}^S$. Wir bezeichnen mit $\mathring{W}_{\text{Koh}} = W_{\text{Koh}} \cap (0, \pi)^S$ die Menge der inneren Punkte der Menge W_{Koh}. Nach dem Satz von Fary ist $\mathring{W}_{\text{Koh}}$ nicht leer. Wir zeigen nun, dass das Gleichungssystem (1) linear unabhängig ist. Die konvexe Menge W_{Koh} hat demnach die Dimension $\#S - \#\Delta - \#E_{\text{In}} = 2(\#\Delta) - \#E_{\text{In}} = -1 + \#K$. Dabei folgt die letzte Gleichheit etwa mit Induktion über die Anzahl Dreiecke.

Für $d \in \Delta$ ist die Abbildung $s \mapsto (d, s)$ ein Element von $\mathbf{R}^S$. Wir bezeichnen es mit $(d, \cdot)$. Analog definieren wir $(e, \cdot) \in \mathbf{R}^S$.

2.3. LEMMA. *Die linear Hülle von* $\{(d, \cdot), (e, \cdot) \mid e \in E, d \in \Delta\}$ *im Vektorraum* $\mathbf{R}^S$ *hat die Dimension* $\#\Delta + \#E - 1$.

Beweis. Sei

$$\sum_{d \in \Delta} a_d(d, \cdot) - \sum_{e \in E} b_e(e, \cdot) = 0 \tag{2}$$

eine Relation. Wir zeigen, dass alle Koeffizienten dieser Relation gleich gross sind. Sei d ein Dreieck von P und e eine Ecke, welche in d enthalten ist. Dann gibt es genau einen Sektor s mit $(e, s) = (d, s) = 1$. Für alle Eckpunkte $e' \neq e$ und Dreiecke $d' \neq d$ gilt $(e', s) = (d', s) = 0$. Testen wir (2) mit s folgt $a_d = b_e$. Seien nun e und e' zwei Eckpunkte, welche mit einer Kante $k \in K$ verbunden sind. Dann gibt es ein Dreieck $d \in \Delta$, so dass k in d enthalten ist. Es folgt $b_e = a_d = b_{e'}$. Da sich nun zwei beliebige Eckpunkte e und e' durch einen Kantenzug verbinden lassen, muss für alle Eckpunktpaare e und e' gelten $b_e = b_{e'}$. Ebenso folgt für beliebige $d \in \Delta$ und $e \in E$ die Gleichheit $a_d = b_e$.

Bezeichnen wir mit 1_S die konstante Funktion, welche jeden Sektor $s \in S$ auf $1 \in \mathbf{R}$ abbildet, so gilt

$$1_S = \sum_{d \in \Delta} (d, \cdot) = \sum_{e \in E} (e, \cdot)$$

und die Relation (2) ist also proportional zur Relation

$$\sum_{d \in \Delta} (d, \cdot) - \sum_{e \in E} (e, \cdot) = 0 . \qquad \square$$

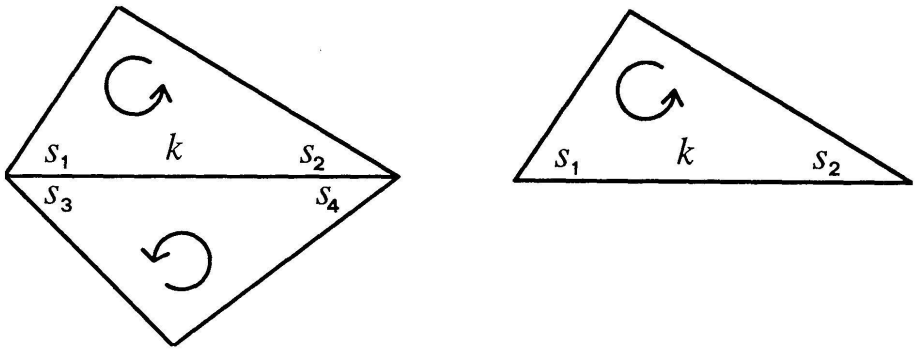
Da für jedes Polyeder E_{Rand} nicht leer ist, ist das System $\{(d, \cdot), (e, \cdot) \mid e \in E_{\text{In}}, d \in \Delta\}$ linear unabhängig und wir erhalten:

2.4. PROPOSITION. *Das Gleichungssystem (1) ist linear unabhängig.*

Als Lösungsraum linearer Gleichungen ist W_{Koh} konvex und für jeden inneren Punkt ψ ist der Tangentialraum $T_\psi W_{\text{Koh}}$ somit unabhängig von ψ. Es gilt

$$T_\psi W_{\text{Koh}} = \left\{ v \in \mathbf{R}^S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{s \in S} (d, s) v(s) = 0, & \forall d \in \Delta \\ \text{und} & \\ \sum_{s \in S} (e, s) v(s) = 0, & \forall e \in E_{\text{In}} \end{array} \right\} \tag{3}$$

Wählen wir auf $|P|$ eine Orientierung, so induziert diese eine Orientierung auf jedem Dreieck von $|P|$. Sei nun k eine Kante mit den anliegenden Sektoren s_1, s_2, s_3 und s_4, so dass bezüglich der Orientierung von $|P|$ die Numerierung wie in Figur 2 vorliegt.



FIGUR 2

Numerierung für eine innere Kante und eine Randkante

Für $k \in K_{\text{In}}$ sei $t_k \in T_\psi W_{\text{Koh}}$ der Vektor

$$t_k(s) := \begin{cases} -1 & \text{wenn } s = s_1 \text{ oder } s = s_4 \\ 1 & \text{wenn } s = s_3 \text{ oder } s = s_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $k \in K_{\text{Rand}}$ sei $t_k \in T_\psi W_{\text{Koh}}$ der Vektor

$$t_k(s) := \begin{cases} -1 & \text{wenn } s = s_1 \\ 1 & \text{wenn } s = s_2 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

2.5. LEMMA. *Das System* $\{t_k \mid k \in K\}$ *hat den Rang* $-1 + \#K$.

Beweis. Sei

$$\sum_{k \in K} a_k t_k = 0$$

eine Relation und seien $k, k' \in K$ die beiden Schenkel eines Sektors s. Dann gilt

$$0 = \left(\sum_{k \in K} a_k t_k \right)(s) = \pm (a_k - a_{k'}) .$$

Testen wir so mit allen Sektoren sehen wir, dass $\sum_{k \in K} t_k = 0$ die einzige lineare Relation des Systems $\{t_k \mid k \in K\}$ ist. $\square$

Der Raum $T_\psi W_{\text{Koh}}$ hat die Dimension $-1 + \#K$. Nach Lemma 2.5. folgt:

2.6. PROPOSITION. *Die Vektoren* t_k *spannen den Tangentialraum* $T_\psi W_{\text{Koh}}$ *auf.*

2.7. Ist e ein Eckpunkt von P, so verstehen wir unter der *Blume* von e die Vereinigung aller Dreiecke $d \in \Delta$, welche e als Eckpunkt enthalten.

Sei $G = G(P)$ die Menge der Abbildungen $g: |P| \mapsto \mathbf{E}$ (wobei $\mathbf{E}$ die euklidische Ebene bedeute und $|P|$ die Standard-Realisierung von P), die folgende Eigenschaften erfüllen:

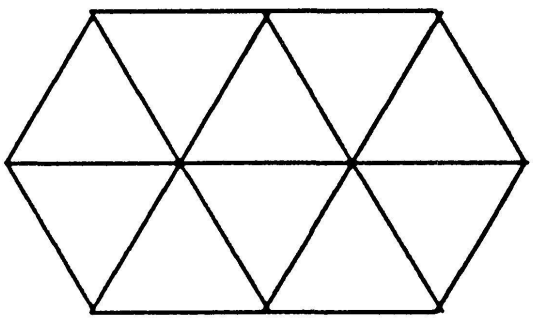
- g ist affin auf jedem Dreieck von $|P|$,
- g ist injektiv auf jeder Blume von $|P|$.

Jedes $g \in G$ liefert uns eine Abbildung $\psi: S \to [0, \pi]$ wenn wir jedem Sektor seinen Winkel in $g(|P|) \subset \mathbf{E}$ zuordnen. Da g injektiv auf jeder Blume ist, ist ψ sogar kohärent, also in W_{Koh}. Wir haben so eine „Winkelablesefunktion"

$$A: G \mapsto W_{\text{Koh}}.$$

Ein Winkelsystem $\psi \in A(G)$ nennen wir *geometrisch realisierbar* und die Teilmenge von W_{Koh}, mit dieser Eigenschaft, W_{Geo}. Für $\psi \in W_{\text{Geo}}$ bezeichnen wir mit $g_\psi: |P| \mapsto \mathbf{E}$ eine geometrische Realisierung des Winkelsystems ψ und mit $P_\psi \subset \mathbf{E}$ das Bild von g_ψ.

Eine Realisierung, wie im Satz von Fary, liefert ein $\psi \in W_{\text{Koh}}$, welches sogar in W_{Geo} liegt. Darum ist auch W_{Geo} nicht leer. Nicht jedes $\psi \in \mathring{W}_{\text{Koh}}$ liegt aber in W_{Geo}. Betrachten wir in $\mathbf{E}$ etwa die Triangulierung von Figur 3. Neun dieser gleichseitigen Dreiecke bestimmen das zehnte Dreieck vollständig. Ist ψ das Winkelsystem dieser Triangulierung und k eine Kante, so liegt $\psi + \varepsilon t_k$ nur für $\varepsilon = 0$ in W_{Geo}.



FIGUR 3

Für jede Kante führt die „Scherung" t_k aus W_{Geo} hinaus

Wir haben in $\mathbf{R}^S$ nun drei Mengen $W \supset W_{\text{Koh}} \supset W_{\text{Geo}}$ definiert. Die Menge W_{Geo} sitzt als Teilmenge kompliziert in W_{Koh}. Wir kennen für W_{Geo} keine direkte Beschreibung. Im nächsten Paragraphen definieren wir auf W eine Funktion L. Es zeigt sich, dass die Einschränkung von L auf W_{Koh} genau einen kritischen Punkt in $\mathring{W}_{\text{Koh}}$ hat. Dieser liegt auch in W_{Geo} und das 1-Skelett seiner geometrischen Realisierung entspricht dem Graphen einer Kreispackung.

3. Die Funktion $L: W \to \mathbf{R}$

3.1. Wir definieren für $\psi \in W$

$$L(\psi) = -2 \sum_{s \in S} \left(\int_0^{\psi(s)/2} \log \tan \vartheta \, d\vartheta \right). \tag{4}$$

Die so definierte Funktion $L: W \mapsto \mathbf{R}$ ist auf W stetig und auf $\mathring{W}$ analytisch.

Es sei bemerkt, dass sich das Integral

$$I(\alpha) := -\int_0^{\alpha/2} \log \tan \vartheta \, d\vartheta \qquad \alpha \in [0, \pi]$$

mit der Lobatchevsky-Funktion $\mathscr{L}: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ ausdrücken lässt. Sei $\mathscr{L}(\delta) := -\int_0^{\delta} \log |2 \sin \vartheta| \, d\vartheta$, dann gilt

$$I(\delta) = \mathscr{L}\left(\frac{\delta}{2}\right) + \mathscr{L}\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right).$$

Mit der Lobatchevsky-Funktion kann man das Volumen hyperbolischer 3-Simplices aus deren Keilwinkel bestimmen. Darum hat auch $I(\delta)$ und $L|_{W_{\text{Koh}}}$ eine geometrische Bedeutung im hyperbolischen 3-Raum $\mathbf{H}^3$. In 3.2. ordnen wir jedem Winkelsystem $\psi \in W_{\text{Koh}}$ eine Figur in $\mathbf{H}^3$ so zu, dass $L(\psi)$ dem Volumen dieser Figur entspricht. Diese geometrische Interpretation von $L|_{W_{\text{Koh}}}$ wird zum nackten Beweis des Satzes von Andeev jedoch nicht verwendet.