

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN  
**Autor:** Brägger, Walter  
**Vorwort:** 1. EINLEITUNG  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59490>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN

von Walter BRÄGGER<sup>1</sup>

## 1. EINLEITUNG

Sei  $G$  die Sphäre  $S^2$  oder die euklidische Ebene  $\mathbf{E}$  mit der üblichen Metrik. Eine Familie abgeschlossener Kreisscheiben in  $G$  nennen wir eine Kreispackung, wenn je zwei dieser Kreisscheiben keinen inneren Punkt gemeinsam haben. Einer Kreispackung können wir einen simplizialen 1-Komplex zuordnen. Wir nehmen als Eckpunkte (0-Simplices) die Mittelpunkte der Kreisscheiben und als Kanten (1-Simplices) die geodätischen Verbindungslien der Mittelpunkte tangenter Kreisscheiben. Diesen 1-Komplex nennen wir den Graphen der Kreispackung. Im weiteren wollen wir nur solche Kreispackungen betrachten, deren Graphen 1-Skelette von endlichen Triangulierungen sind (siehe Fig. 1). Seien  $K_1$  und  $K_2$  zwei simpliziale 1-Komplexe,  $f$  eine Bijektion zwischen den Mengen der Eckpunkte und  $g$  eine Bijektion zwischen den Kantenmengen der beiden Komplexe. Das Paar  $(f, g)$  nennen wir eine kombinatorische Äquivalenz, wenn die Bilder zweier durch eine Kante  $k$  verbundener Eckpunkte, durch die Bildkante von  $k$  verbunden sind. Die 1-Skelette zweier Triangulierungen  $T_1$  und  $T_2$  nennen wir kombinatorisch äquivalent, wenn es eine kombinatorische Äquivalenz ihrer Eckpunkte- und Kantenmenge gibt. Es gilt der folgende Satz von Andreev. Die hier zitierte Form mittels Kreispackungen stammt von Thurston (vgl. [An] und [Tu]):

**SATZ VON ANDREEV.** *Sei  $T$  eine Triangulierung der Sphäre  $S^2$ , dann existiert bis auf Möbiustransformation genau eine Kreispackung, deren Graph kombinatorisch äquivalent zum 1-Skelett von  $T$  ist.*

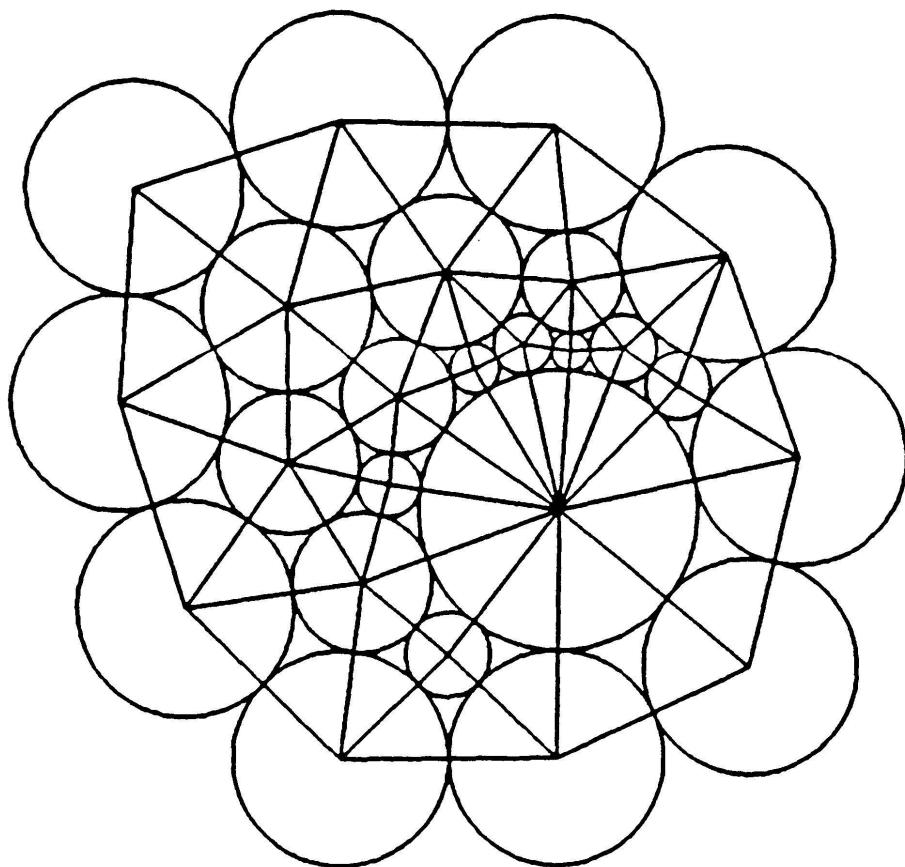
Yves Colin de Verdière hat bewiesen (siehe [CV1]), dass eine Kreispackung wie im Satz von Andreev dem Minimum eines konvexen, eigentlichen Funktionals auf  $\mathbf{R}^E$  ( $E$ =Eckpunktmenge von  $T$ ) entspricht. Diese Funktionale sind als Integrale über geschlossene Differentialformen gegeben.

---

<sup>1</sup> Diplomarbeit bei Prof. Dr. Norbert A'Campo. Für seine Hilfe möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken.

Untersucht man diese Funktionale, stösst man rasch auf die Lobachevsky-Funktion und damit auf das Volumen hyperbolischer 3-Simplices.

Im folgenden wollen wir den Satz von Andreev beweisen, indem wir Kreispackungen als Maxima konkaver Funktionale auf  $W = [0, \pi]^S$  ( $S$  = Sektorenmenge von  $T$ ) interpretieren.



FIGUR 1

Beispiel einer Kreispackung

## 2. VORBEREITUNGEN

2.1. Sei  $P$  ein Polyeder, dessen Standard-Realisierung  $|P|$  in  $\mathbf{R}^E$  homöomorph zu einer Kreisscheibe ist. Seien  $E = E(P)$ ,  $K = K(P)$ ,  $\Delta = \Delta(P)$  die Mengen aller *Eckpunkte* (0-Simplices), *Kanten* (1-Simplices) und *Dreiecke* (2-Simplices) von  $P$ . Jedes 2-Simplex hat drei Winkelsektoren, im folgenden