

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THE MEAN SQUARE OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION ON THE LINE = 1

Autor: Balasubramanian, R. / Ivi, A / Ramachandra, K.

Kurzfassung

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59479>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 18.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

THE MEAN SQUARE OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION ON THE LINE $\sigma = 1$

by R. BALASUBRAMANIAN, A. IVIĆ and K. RAMACHANDRA

*To the memory
of Professor R. Sitaramachandrarao
1.4.1948-9.8.1990*

ABSTRACT. Let $R(T) := \int_1^T |\zeta(1+it)|^2 dt - \zeta(2)T + \pi \log T$. We prove

upper bounds for $R(T)$, $\int_1^T R(t)dt$ and $\int_1^T R^2(t)dt$.

One of the fundamental problems in the theory of the Riemann zeta-function is the evaluation of power moments, and in particular the evaluation of

$$(1) \quad \int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt .$$

In view of the functional equation $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$, where

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma+it-1/2} e^{i(t+\pi/4)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

for $s = \sigma + it$, $t \geq t_0 > 0$, it transpires that the relevant range for σ in (1) is $1/2 \leq \sigma \leq 1$. A considerable amount of literature is devoted to the most important case $\sigma = 1/2$ (see e.g. Ch. 15 of [3] and [4] for a comprehensive account). For $1/2 < \sigma < 1$ fixed one has (see (8.112) of [3])

$$(2) \quad \int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt = \zeta(2\sigma)T + O(T^{2-2\sigma}) .$$