

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COMMENT RENDRE GÉODÉSIQUE UNE TRIANGULATION D'UNE SURFACE?
Autor: de Verdière, Yves Colin
Kapitel: 2. Preuve du théorème 2
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58738>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Montrons que la fonctionnelle E_c atteint son minimum sur $H^1(\Gamma_0, X)$: cela résulte classiquement de la compacité des ensembles $E_c \leq M$ pour la topologie de la convergence uniforme (Ascoli: $d(\varphi_{i,j}(s), \varphi_{i,j}(s')) \leq C^{te} \cdot \sqrt{|s' - s|}$) et de la semi-continuité inférieure de E_c pour cette topologie.

Si on a 2 solutions, soient φ_1 et φ_2 , on peut rendre l'homotopie entre elles géodésique, au sens que pour chaque t , la restriction de φ_t aux arêtes de Γ_0 est géodésique et que, pour tout sommet i de Γ_0 , l'application $t \rightarrow \varphi_t(i)$ est géodésique. $E_c(\varphi_t)$ est alors convexe pour $t \in [1, 2]$ dès que la courbure de X est ≤ 0 ; en effet, si $V_{i,j} = \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial t}$, $T = \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial s}$ et K_g est la courbure sectionnelle, on a la formule de variation seconde:

$$\frac{d^2 E_c}{dt^2} = \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \int_0^1 (\| \nabla_T V_{i,j} \|^2 - K_g(\varphi_{i,j}(s)) | (V_{i,j})_{norm} |^2) ds ,$$

où $(V_{i,j})_{norm}$ est la composante normale à T de $V_{i,j}$.

On en déduit que $E_c(\varphi_t)$ est constante, ainsi que les longueurs des images par φ_t des arêtes de Γ_0 (somme constante de fonctions convexes), puis le résultat annoncé: la distance entre 2 points parcourant à vitesse constante 2 géodésiques ne pouvant être constante que si la région balayée est plate et les 2 géodésiques *parallèles* et parcourues à la même vitesse.

Remarquons aussi que les extrémis de E_c sont caractérisés par le fait que les $\varphi_{i,j}$ sont des arcs géodésiques paramétrés proportionnellement à la longueur et qu'on a

$$\forall i, \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \dot{\varphi}_{i,j}(0) = 0 ,$$

où $\varphi_{i,j}$ est supposée telle que $\varphi_{i,j}(0) = \varphi(i)$.

2. PREUVE DU THÉORÈME 2

Dans ce §, φ est donnée minimisant E_c dans la classe d'homotopie de φ_0 . Pour tout triangle T de X_0 , la restriction de φ au bord de T est homotope à 0 et donc se relève en un $\tilde{\varphi}$ dans le revêtement universel \tilde{X} de X , unique à automorphisme près du revêtement. L'image $\tilde{\varphi}(\partial T)$ est le bord d'un triangle T_φ (éventuellement dégénéré) de \tilde{X} . On prolonge φ à X_0 en Φ de façon que, pour tout triangle T , on ait $\Phi(T) = \pi(T_\varphi)$, où π est la projection canonique

de \tilde{X} sur X et que Φ soit un homéomorphisme local de T sur $\Phi(T)$ si ce triangle n'est pas dégénéré.

2.a. COURBURE

On attribue à chaque angle de chaque triangle de X_0 une mesure α avec $0 \leq \alpha \leq \pi$ qui est celle de l'angle correspondant dans T_φ de façon compatible avec la dégénérescence éventuelle de T_φ : si les 3 sommets de T_φ sont confondus, les α sont arbitraires de somme π . Si le triangle est plat sans côtés de longueur nulle, 2 des α valent 0, le 3^e π , si le triangle a un côté de longueur nulle prendre les angles ayant ce côté avec la valeur $\frac{\pi}{2}$, etc.

On définit alors la courbure K_φ de chaque sommet i par $K_\varphi(i) = 2\pi - \sum_i \alpha$, où \sum_i désigne la somme sur les angles de sommet i .

La formule de Gauss-Bonnet donne, en notant par K_g la courbure de Gauss de (X, g) :

$$\sum_i K_\varphi(i) + \sum_T \int_{T_\varphi} K_g = 2\pi\chi(X) ;$$

en effet, pour un triangle non dégénéré, on a par Gauss-Bonnet pour un triangle géodésique que l'intégrale de la courbure vaut la somme des angles diminuée de π , alors que pour un triangle dégénéré cette intégrale vaut 0 et par la convention précédente la somme des angles vaut π . Sommant ces égalités sur tous les triangles et utilisant la relation d'Euler $\chi(X) = \text{nombre de sommets} - \text{nombre d'arêtes} + \text{nombre de faces}$, et le fait que pour une triangulation le nombre de faces vaut les $\frac{2}{3}$ du nombre d'arêtes, on conclut facilement.

Comme Φ est homotope à Φ_0 , elle est de degré 1 et l'on en déduit qu'elle est surjective. Comme X est à courbure négative ou nulle et que $\int_X K_g = 2\pi\chi(X)$, on a

$$(1) \quad \sum_i K_\varphi(i) \geq 0 .$$

2.b. DÉGÉNÉRESCENCE PONCTUELLE

Soit X_1 un sous-complexe connexe complet maximal de X_0 tel que la restriction de Φ à X_1 soit constante, alors:

LEMME. X_1 est simplement connexe.

Preuve. D'abord il est clair que X_1 ne contient pas de lacets de X non homotopes à 0, car un tel lacet deviendrait par φ homotope à 0.

De plus, si X_1 n'était pas 1-connexe, on pourrait diminuer E_c en appliquant la partie de X_0 intérieure à X_1 sur le même point de X que $\varphi(X_1)$. \square

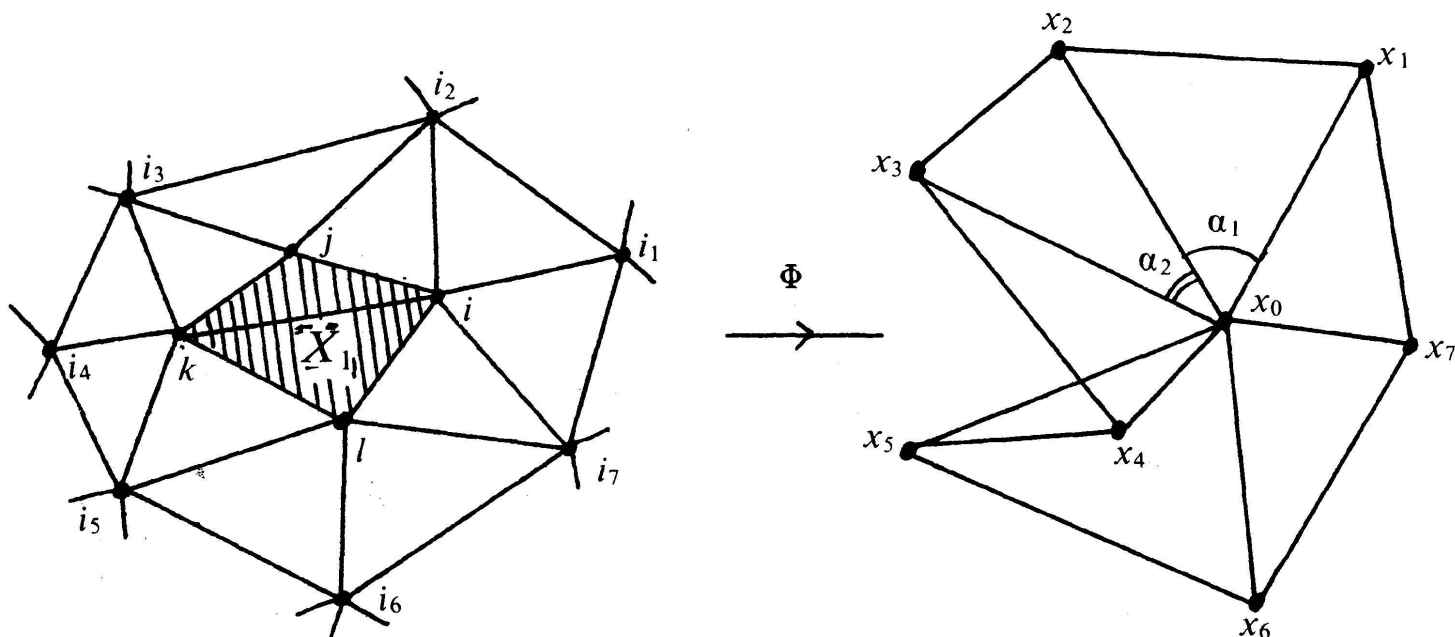


FIGURE 1

Soit (i_1, i_2, \dots, i_m) (fig. 1) le cycle des sommets de X_0 entourant X_1 , $x_0 = \varphi(X_1)$, $x_l = \varphi(i_l)$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les mesures des angles de sommet i dans X_1 et de côtés $(i, i_l), (i, i_{l+1})$. Si on pose

$$K_\varphi(X_1) = 2\pi - \sum_{l=1}^{l=m} \alpha_l,$$

la formule de Gauss-Bonnet implique

$$K_\varphi(X_1) = \sum_{i \text{ sommet de } X_1} K_\varphi(i).$$

Soit u_l le vecteur unitaire tangent en x_0 à l'arc géodésique orienté image par φ d'une arête (i, i_l) (i sommet de X_1). Le fait que φ soit critique pour E_c implique l'existence de constantes $C_l > 0$ telles que:

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_l u_l = 0.$$

Il est donc impossible que $K_\varphi(X_1)$ soit > 0 ; en effet alors l'image par φ du cycle (i_1, i_2, \dots, i_l) n'entourerait pas x_0 et donc les vecteurs u_i seraient tous dans un demi-plan strict de l'espace tangent en x_0 à X (une application continue du cercle dans lui-même qui n'est pas surjective est telle que tout point non extrémité de l'image est l'image d'au moins deux points). La relation (1) implique alors que $K_\varphi(X_1) = 0$, car l'ensemble des sommets de X est la réunion des sommets des complexes X_1 (éventuellement réduits à un point).

Montrons maintenant que la seule possibilité pour X_1 est d'être un sous-graphe linéaire de sommets consécutifs (j_1, j_2, \dots, j_k) tel que l'image des triangles de X_0 ayant au moins un sommet dans X_1 par φ soit un segment géodésique contenant x_0 comme point intérieur (fig. 2).

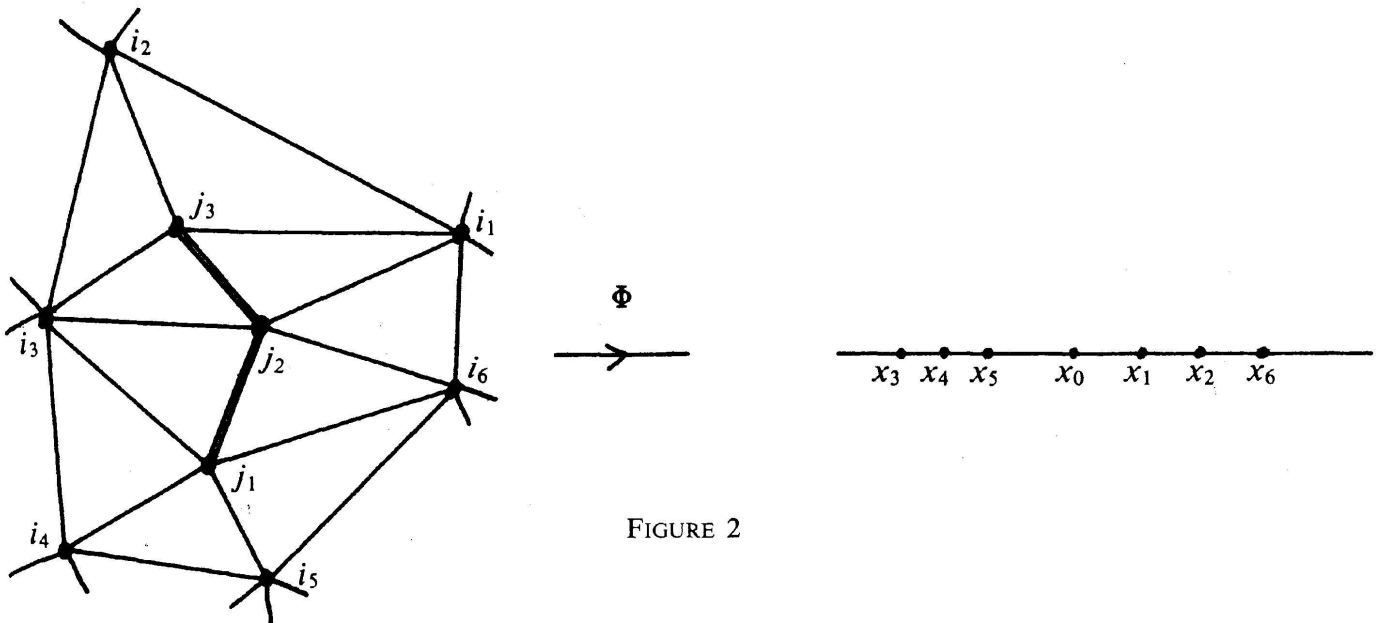
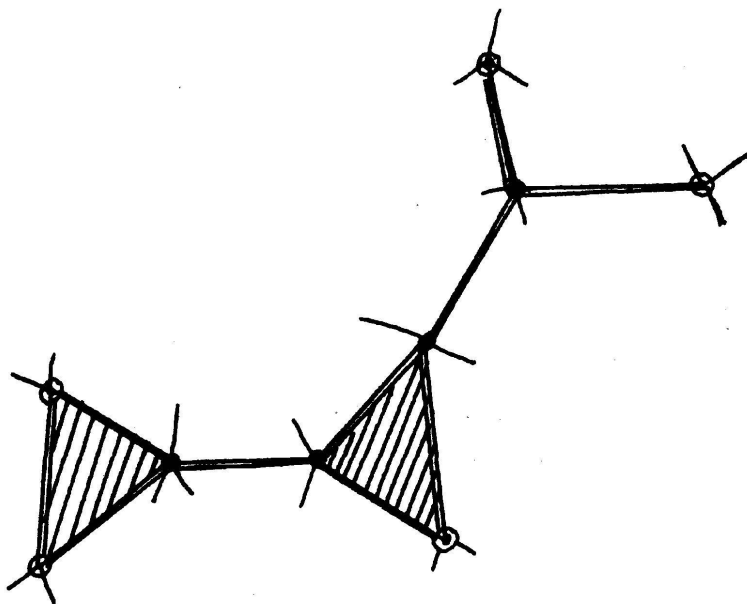


FIGURE 2

En effet, appelons *extrémal* tout sommet i de X_1 tel que les cônes tangents en i à X_0 et $X_0 \setminus X_1$ soient connexes et non vides (fig. 3). Alors, on voit



Sommets extrémaux de X_1 : \circ

FIGURE 3

que X_1 admet au moins 3 sommets extrémaux s'il n'est pas un graphe linéaire. Montrons que la somme des angles α_i extérieurs à X_1 ayant pour sommet un tel point extrémal est $\geq \pi$: en effet dans le cas contraire les vecteurs u_i correspondants seraient dans un demi-plan strict. Comme la somme totale des α_i est 2π , on en déduit le résultat annoncé: il y a au plus 2 sommets extrémaux et donc X_1 est linéaire. Si X_1 n'est pas réduit à un sommet unique, il est clair que la condition d'extréma pour E_c implique que les vecteurs u_i issus des extrémités sont alignés et non tous de même orientation. Les α_i correspondant aux autres sommets de X_1 sont alors nuls, puisque la somme totale est 2π .

On voit ainsi que la courbure $K_\varphi(i)$ est nulle pour tous les sommets de X_0 , car les complexes X_1 sont soit réduits à un point, soit des sous-graphes linéaires et dans ce dernier cas, c'est clair que la courbure K_φ est nulle en chaque sommet de X_1 . On note que tous les triangles qui ont un sommet au moins dans X_1 sont dégénérés.

2.c. DÉGÉNÉRESCENCE LINÉAIRE

2.c1. Soit X_2 un sous-complexe connexe complet maximal de X_0 tel que les images par φ des triangles de X_2 soit dégénérés. D'après ce qui précède les arêtes issues d'un sommet de ∂X_2 ont des images par φ non réduites à un point: les seuls « X_1 » possibles sont intérieurs à des « X_2 ».

Alors on a le:

LEMME. X_2 est soit 1-connexe, soit contractible sur une courbe de X_0 non homotope à 0. Dans le premier cas, l'image par φ de X_2 est un segment de géodésique, dans le second, c'est une géodésique périodique.

Preuve. Il est clair d'après ce qui précède que l'image de X_2 par Φ est un arc complet d'une géodésique de X .

En effet si 2 triangles dégénérés ont un côté non réduit à un point en commun ils sont alignés, il en est de même d'après le paragraphe précédent s'ils ont un côté réduit à un point.

Les composantes connexes de $X_0 \setminus X_2$ ne sont pas des disques topologiques car le bord de ce disque ayant une image géodésique, on peut diminuer E_c en projetant orthogonalement le disque sur cette géodésique (le faire dans le revêtement universel).

Si maintenant X_2 n'est pas un disque, les composantes connexes du bord ne sont pas homotopes à 0, mais sont homotopes entre elles dans X , sinon l'image par φ ne pourrait être une seule géodésique.

On en déduit que X_2 est soit un disque, soit un cylindre, soit un ruban de Möbius. On élimine aussi facilement le cas où $X_2 = X$. \square

2.c2. Cas où X_2 est un disque

Dans ce cas la formule de Gauss-Bonnet donne:

$$\sum_{i \in \partial X_2} (\sum_i \alpha_{ext} - \pi) = 2\pi,$$

où $\sum_i \alpha_{ext}$ est la somme des mesures des angles extérieurs à X_2 au sommet i de ∂X_2 .

De plus cette somme \sum_i ne peut valoir que $0, \pi$ ou 2π , car les angles intérieurs valent tous 0 ou π et la courbure K_φ est 0 .

Le cas 0 est impossible car alors les triangles extérieurs de sommet i seraient dégénérés et donc feraient partie de X_2 . On voit donc qu'il y a exactement 2 sommets de ∂X_2 où cette somme vaut 2π et les autres où elle vaut π . Montrons qu'il n'y a pas de sommets de cette sorte:

c'est clair car les arêtes extérieures en i sont situées dans un demi-espace, ce qui est impossible (condition d'extrémas), sauf si elles sont alignées avec $\varphi(\partial X_2)$ auquel cas elles ne sont pas extérieures.

On en conclut que le bord de X_2 n'a que 2 sommets, ce qui est incompatible avec le fait que X_0 est un complexe simplicial: il n'y a pas 2 arêtes qui ont les mêmes extrémités.

2.c3. Cas où X_2 est un cylindre ou un ruban de Möbius

La même technique que précédemment s'étend sans difficultés.

On a donc montré que tous les triangles $\Phi(T)$ sont non dégénérés.

2.d. FIN DE LA PREUVE

Il est maintenant clair que Φ est un homéomorphisme local à l'intérieur des triangles de X_0 , il reste à voir que c'est vrai près des sommets et comme Φ est de degré 1, on en déduit que c'est un homéomorphisme global.

Comme $K_\varphi(i)$ est nul, la seule possibilité pour que Φ ne soit pas un homéomorphisme local en i est que l'image des triangles de sommet i soit contenue dans un angle d'ouverture $\leq \pi$. C'est impossible car toutes les arêtes issues de i devraient avoir une image alignée et donc les triangles de sommet i seraient dégénérés.