

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXEMPLES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES
Autor: Audin, Michèle
Kapitel: 2.3. Anses d'indice 1
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58736>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$c_1^2 - 3c_2 = 5n + 4 - 3(n + 2) = 2n - 2 \leq 0$$

ce qui n'est possible que pour $n = 1$.

Plus généralement, on peut construire par cette « chirurgie » de nombreuses variétés presque complexes sans structure complexe puisque l'opération augmente c_1^2 de 1 et diminue $3c_2$ de 2.

2.3. ANSES D'INDICE 1

On peut jouer au même jeu avec des chirurgies d'indice supérieur. On trouve toujours une impossibilité à la chirurgie ordinaire, mais une possibilité d'ajouter une anse presque complexe. A titre d'exemple simple, détaillons ici le cas des anses d'indice 1.

On choisit un plongement à fibré normal trivial de S^1 dans W (resp. V). On écrit comme plus haut $\mathcal{W} = \overline{W - S^1 \times B^3}$, et $\mathcal{V} = \overline{V - S^1 \times B^3}$ (V est la variété inconnue, que l'on suppose simplement connexe). Les mêmes méthodes que ci-dessus fonctionnent pour donner

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \rightarrow H_2 V \rightarrow 0$$

($H_2 \mathcal{W}$ est somme de $H_2 V$ et du facteur \mathbf{Z} engendré par une sphère $* \times S^2 = \partial(* \times B^3)$ fibre du fibré en sphères normal à S^1). Supposons W simplement connexe, on a de même

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \rightarrow H_2 W \rightarrow 0$$

et Mayer-Vietoris donne

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \oplus H_2 \mathcal{V} \rightarrow H_2 W^* \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

(les deux sphères sont les mêmes dans W^*).

Ainsi $b_2(W^*) = b_2(W) + b_2(V) + 2$, $\sigma(W^*) = \sigma(W) + \sigma(V)$: on a rajouté un facteur hyperbolique comme on s'en convainc agréablement en imaginant que $W = V = S^4$ et donc que $W^* = S^2 \times S^2$; de plus $\chi(W^*) = \chi(W) + \chi(V)$.

Si x est la première classe de Chern de W , l'équation à résoudre est

$$(4) \quad Q_W(x) + Q_V(y) + 2uv = 2(\chi(W) + \chi(V)) + 3(\sigma(V) + \sigma(W))$$

où x et y sont caractéristiques et u et v sont pairs.

Cette fois on peut prendre pour V n'importe quelle variété presque complexe (avec y le c_1 d'une structure presque complexe) avec u ou v nul; on peut aussi choisir $u = v = 2$ (ce qui correspond à la structure complexe usuelle dans le cas de $S^2 \times S^2$)... et V et y comme ci-dessus ($2uv = 8$).

Appelons *anse presque complexe d'indice 1* le choix de \mathcal{V} obtenu à partir de $V = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ avec la structure complexe usuelle (alors $uv = 0$). On a comme plus haut :

PROPOSITION 2.3.1. *Il n'existe aucune structure complexe intégrable (resp. symplectique) sur l'anse presque complexe d'indice 1 qui se recolle à la structure usuelle de $\mathbf{C}^2 - S^1 \times B^3$ (où $S^1 \times B^3$ est un voisinage tubulaire d'un petit cercle standard de \mathbf{C}^2).*

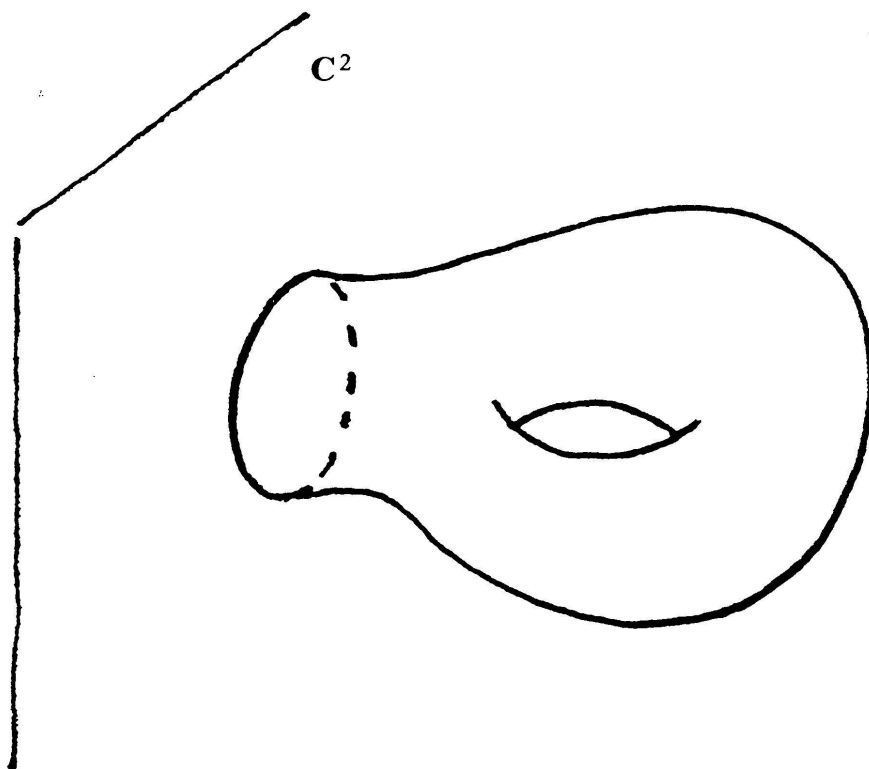


FIGURE 6

Démonstration. Supposons qu'une telle structure existe. En plongeant \mathbf{C}^2 dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ on construit une variété complexe (resp. symplectique) compacte dont la forme d'intersection s'écrit $a^2 + 2bc + d^2$ et qui contient une courbe rationnelle plongée (une droite projective de l'exemplaire de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ obtenu en complétant le \mathbf{C}^2 standard) d'auto-intersection $+1$. La forme $2bc + d^2$ est équivalente (sur \mathbf{Z}) à $-x^2 + y^2 + z^2$ ce qui fait qu'un modèle minimal de notre surface complexe (variété symplectique) va être une surface avec forme d'intersection $a^2 + y^2 + z^2$ et une courbe rationnelle à auto-intersection $+1$ (nous n'avons pas modifié le a^2). Ceci est interdit comme plus haut. \square

Remarque. La proposition reste vraie si on remplace le $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ayant permis de construire l'anse \mathcal{V} par une variété presque complexe V dont la forme d'intersection est définie positive et de type I (c'est-à-dire prend des valeurs paires et impaires). La démonstration est identique: la forme $2bc + Q_V(d)$ prend la valeur -1 (si d est tel que $Q_V(d) = 2m - 1$, on prend $b = 1$ et $c = -m$), elle est donc équivalente (sur \mathbf{Z}) à $-x^2 + Q(y)$ où Q est une forme quadratique entière de rang $b_2(V) + 1$ et de signature $\sigma(V) + 1$ donc définie positive. Un modèle minimal de notre variété aura une courbe rationnelle à auto-intersection positive et une forme d'intersection $a^2 + Q(y)$ ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons.

3. APPENDICE: SOMMES CONNEXES DE VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

3.1. STRUCTURE SUR LES TUBES

Naïvement, on pourrait espérer construire une forme symplectique «somme connexe» en faisant la chirurgie sur des disques contenus dans des ouverts de Darboux et en construisant une forme symplectique sur le tube $S^{2n-1} \times I$ qui se recolle de chaque côté avec la structure standard de \mathbf{R}^{2n} - Disque. Les remarques précédentes impliquent qu'une telle forme n'existe certainement pas en dimension $\neq 2$ ou 6 . Les arguments utilisés sont assez grossiers (structure presque complexe au lieu de forme symplectique) et, en réponse à ma question sur la dimension 6 , Dusa McDuff [6] m'a fourni un argument plus fin, basé sur les techniques de Gromov [3], que je vais décrire maintenant et qui montre qu'une telle forme n'existe sur aucun tube $S^{2n-1} \times I$ (pour $n \geq 2$).

3.2. LE CONTRE-EXEMPLE

Il suffit donc d'exhiber deux variétés symplectiques de dimension 6 , (V_1, ω_1) et (V_2, ω_2) telles que sur $W = V_1 \# V_2$, aucune forme symplectique ω ne puisse avoir, en restriction à V_1 , une propriété que possède ω_1 .

PROPOSITION 3.2.1. [3, 2.4.B₃], [6.9] *Sur $W = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \# T^{2n}$, il n'existe aucune forme symplectique ω qui admette $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ comme sous-variété symplectique.*

Remarque. D'après 1.2 et [9], $\mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \# T^6$ possède des structures presque complexes.