Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOUS-GROUPES LIBRES DANS LES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES

Autor: Pays, Isabelle / Valette, Alain

Kapitel: 4. Preuve de l'implication (iv) => (i) du Théorème

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58735

MOY F: Un groupe libre non abélien (avec la topologie discrète) n'est pas moyennable (voir [Ey], II.4; [Gl], exemple 1.2.3; [vN], §5 de l'Introduction).

L'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème est alors une conséquence immédiate de MOY E et MOY F.

4. Preuve de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) du Théorème

Nous allons montrer que, si X est un arbre localement fini, les stabilisateurs dans $\mathrm{Aut}\, X$ d'un sommet, d'une arête, d'un bout, ou d'une paire de bouts de X, sont des sous-groupes fermés moyennables.

— *Stabilisateur d'un sommet:* Si x est un sommet, $(\mathrm{Aut}\, X)_x$ est un sous-groupe compact, donc moyennable par MOY D.

— *Stabilisateur d'une arête:* Si $[x, y]$ est une arête, nous notons $(\mathrm{Aut}\, X)_{[x,y]}$ son stabilisateur dans $\mathrm{Aut}\, X$. Le sous-groupe compact ouvert $(\mathrm{Aut}\, X)_x \cap (\mathrm{Aut}\, X)_y$ est d'indice 2 ou 1 dans $(\mathrm{Aut}\, X)_{[x,y]}$ (selon qu'il existe une inversion conservant $[x, y]$ ou pas). Par conséquent $(\mathrm{Aut}\, X)_{[x,y]}$ est lui-même compact, donc moyennable.

— *Stabilisateur d'un bout:* Soit ω un bout de X; considérons l'homomorphisme $l_\omega : (\mathrm{Aut}\, X)_\omega \to \mathbf{Z}$ fourni par le lemme 4 (iii); comme $\mathbf{Z}$ est moyennable ainsi que ses sous-groupes (par MOY A), il suffit par MOY B de vérifier que le noyau $\mathrm{Ker}\, l_\omega$ est moyennable. Pour cela, observons que la famille de sous-groupes compacts $((\mathrm{Aut} X)_\omega \cap (\mathrm{Aut} X)_x)_{x \in X}$ forme un système dirigé: si x, y sont des sommets quelconques de X, et z un sommet sur $[x, \omega[\cap [y, \omega[$, on a:

$$((\mathrm{Aut} X)_\omega \cap (\mathrm{Aut} X)_x) \cup ((\mathrm{Aut} X)_\omega \cap (\mathrm{Aut} X)_y) \subseteq (\mathrm{Aut} X)_\omega \cap (\mathrm{Aut} X)_z$$

puisque $(\mathrm{Aut} X)_\omega \cap (\mathrm{Aut} X)_x$ fixe ponctuellement la demi-droite $[x, \omega[$. La limite inductive de ce système est l'ensemble des rotations dans $(\mathrm{Aut} X)_\omega$, qui coïncide avec $\mathrm{Ker}\, l_\omega$ par le lemme 4 (ii). Le groupe $\mathrm{Ker}\, l_\omega$ est limite inductive de groupes compacts, il est donc moyennable par MOY C.

— *Stabilisateur d'une paire de bouts:* Soit $\{\alpha, \omega\}$ une paire de bouts de X; considérons l'homomorphisme $r_{\alpha\omega} : (\mathrm{Aut} X)_{\{\alpha,\omega\}} \to D_\infty$ introduit vers la fin du §1. Comme D_∞ est un groupe résoluble, tous ses sous-groupes sont moyennables, et il suffit par MOY B de vérifier que le noyau $\mathrm{Ker}\, r_{\alpha\omega}$ est moyennable; mais ce noyau est $\cap_{x \in]\alpha,\omega[}((\mathrm{Aut} X)_{\{\alpha,\omega\}} \cap (\mathrm{Aut} X)_x)$, qui est compact.