Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOUS-GROUPES LIBRES DANS LES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES

Autor: Pays, Isabelle / Valette, Alain

Kapitel: 3. Preuves des implications (ii) => (iii) et (iii) => (iv) du Théorème Moyennabilité

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58735

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Remarque. Si l'arbre X est localement fini, on peut donner une preuve différente du fait que H agit librement sur X. Grâce au lemme 7, on sait déjà que H est libre et qu'il existe au moins un sommet dont le stabilisateur dans H soit trivial (prendre par exemple un sommet sur l'axe de a). Par le lemme 3, H est un sous-groupe discret de $\operatorname{Aut} X$. Si x est un sommet quelconque, le sous-groupe $H \cap (\operatorname{Aut} X)_x$ est discret dans le groupe compact $(\operatorname{Aut} X)_x$, donc $H \cap (\operatorname{Aut} X)_x$ est fini. Comme H est libre, $H \cap (\operatorname{Aut} X)_x$ est trivial.

3. Preuves des implications (ii) ⇒ (iii) et (iii) ⇒ (iv) du Théorème Moyennabilité

L'implication (ii) ⇒ (iii) résulte immédiatement du lemme 3. Nous donnons maintenant quelques rappels sur la moyennabilité qui rendront évidente l'implication (iii) ⇒ (iv).

Soit G un groupe localement compact. On dit que G est *moyennable* si, chaque fois que G opère de manière affine et continue sur un convexe compact non vide C dans un espace vectoriel topologique localement convexe, il existe dans C un point fixe pour l'action de G. Comme références sur la moyennabilité, nous recommandons la petite monographie de Greenleaf [Gl], le livre de Paterson [Pa], et l'article remarquable d'efficacité d'Eymard [Ey]; à propos de la moyennabilité des groupes discrets, l'article original de von Neumann [vN] vaut la peine d'être lu; pour l'évolution historique de la notion, on consultera avec profit le livre de Pier ([Pi], Chapitre 9). Nous rasssemblons maintenant sans démonstration quelques faits classiques sur la moyennabilité.

MOY A: Un groupe abélien est moyennable (c'est le théorème de Markoff-Kakutani, voir [Bo], Appendice du Chapitre IV).

MOY B: La moyennabilité est préservée par extensions; en d'autres termes, si $1 \to N \to G \to G/N \to 1$ est une suite exacte courte de groupes localement compacts avec N et G/N moyennables, alors G est moyennable (voir [Ey], II.1; [Gl], Theorem 2.3.3).

MOY C: La moyennabilité est préservée par limites inductives (voir [Gl], Theorem 2.3.4).

MOY D: Un groupe compact est moyennable.

MOY E: Un sous-groupe fermé d'un groupe moyennable est moyennable (voir [Ey], IV; [Gl], Theorem 2.3.2).

MOY F: Un groupe libre non abélien (avec la topologie discrète) n'est pas moyennable (voir [Ey], II.4; [Gl], exemple 1.2.3; [vN], §5 de l'Introduction).

L'implication (iii) ⇒ (iv) du théorème est alors une conséquence immédiate de MOY E et MOY F.

4. Preuve de l'implication (iv) ⇒ (i) du Théorème

Nous allons montrer que, si X est un arbre localement fini, les stabilisateurs dans $\operatorname{Aut} X$ d'un sommet, d'une arête, d'un bout, ou d'une paire de bouts de X, sont des sous-groupes fermés moyennables.

— *Stabilisateur d'un sommet:* Si x est un sommet, $(\operatorname{Aut} X)_x$ est un sous-groupe compact, donc moyennable par MOY D.

— *Stabilisateur d'une arête:* Si $[x, y]$ est une arête, nous notons $(\operatorname{Aut} X)_{[x,y]}$ son stabilisateur dans $\operatorname{Aut} X$. Le sous-groupe compact ouvert $(\operatorname{Aut} X)_x \cap (\operatorname{Aut} X)_y$ est d'indice 2 ou 1 dans $(\operatorname{Aut} X)_{[x,y]}$ (selon qu'il existe une inversion conservant $[x, y]$ ou pas). Par conséquent $(\operatorname{Aut} X)_{[x,y]}$ est lui-même compact, donc moyennable.

— *Stabilisateur d'un bout:* Soit ω un bout de X; considérons l'homomorphisme $l_\omega : (\operatorname{Aut} X)_\omega \to \mathbf{Z}$ fourni par le lemme 4 (iii); comme $\mathbf{Z}$ est moyennable ainsi que ses sous-groupes (par MOY A), il suffit par MOY B de vérifier que le noyau $\operatorname{Ker} l_\omega$ est moyennable. Pour cela, observons que la famille de sous-groupes compacts $((\operatorname{Aut} X)_\omega \cap (\operatorname{Aut} X)_x)_{x \in X}$ forme un système dirigé: si x, y sont des sommets quelconques de X, et z un sommet sur $[x, \omega[\cap [y, \omega[$, on a:

$$((\operatorname{Aut} X)_\omega \cap (\operatorname{Aut} X)_x) \cup ((\operatorname{Aut} X)_\omega \cap (\operatorname{Aut} X)_y) \subseteq (\operatorname{Aut} X)_\omega \cap (\operatorname{Aut} X)_z$$

puisque $(\operatorname{Aut} X)_\omega \cap (\operatorname{Aut} X)_x$ fixe ponctuellement la demi-droite $[x, \omega[$. La limite inductive de ce système est l'ensemble des rotations dans $(\operatorname{Aut} X)_\omega$, qui coïncide avec $\operatorname{Ker} l_\omega$ par le lemme 4 (ii). Le groupe $\operatorname{Ker} l_\omega$ est limite inductive de groupes compacts, il est donc moyennable par MOY C.

— *Stabilisateur d'une paire de bouts:* Soit $\{\alpha, \omega\}$ une paire de bouts de X; considérons l'homomorphisme $r_{\alpha\omega} : (\operatorname{Aut} X)_{\{\alpha,\omega\}} \to D_\infty$ introduit vers la fin du §1. Comme D_∞ est un groupe résoluble, tous ses sous-groupes sont moyennables, et il suffit par MOY B de vérifier que le noyau $\operatorname{Ker} r_{\alpha\omega}$ est moyennable; mais ce noyau est $\cap_{x \in]\alpha,\omega[}((\operatorname{Aut} X)_{\{\alpha,\omega\}} \cap (\operatorname{Aut} X)_x)$, qui est compact.