

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOUS-GROUPES LIBRES DANS LES GROUPES  
D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES  
**Autor:** Pays, Isabelle / Valette, Alain  
**Kapitel:** 2. Preuve de l'implication (i) => (ii) du Théorème  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58735>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

discontinu. Si  $X$  est localement fini, l'espace  $\bar{X}$  est compact, et fournit ainsi une compactification de l'arbre  $X$ . Enfin, les actions de  $\text{Aut } X$  sur  $X$  et  $\Omega(X)$  se «recollent» en une action par homéomorphismes sur  $\bar{X}$ . Le lemme suivant est encore dû à Tits ([T3], Lemma 1.6).

**LEMME 5.** *Soit  $(T_i)_{i \in I}$  une famille de sous-arbres de l'arbre  $X$ , qui se rencontrent deux à deux. Alors  $\cap_{i \in I} \bar{T}_i$  est non vide.*

*Preuve.* Supposons d'abord l'arbre  $X$  localement fini. Le lemme 1 montre alors que la famille  $(\bar{T}_i)_{i \in I}$  de fermés de  $\bar{X}$  a la propriété d'intersection finie non vide, et la compacité de  $\bar{X}$  permet de conclure. Pour ramener le cas général au cas localement fini, nous utilisons un argument de la preuve originale de Tits. Soit  $x$  un sommet fixé dans  $X$ . Notons  $[x, t_i]$  le pont qui joint  $\{x\}$  à  $T_i$ . Pour  $i, j \in I$ , on voit facilement qu'on a  $[x, t_i] \subseteq [x, t_j]$  ou  $[x, t_i] \supseteq [x, t_j]$ , car  $T_i \cap T_j$  est non vide. Donc  $S = \cup_{i \in I} [x, t_i]$  est un segment géodésique ou une demi-droite, et de plus les sous-arbres de la famille  $(S \cap T_i)_{i \in I}$  se rencontrent deux à deux. Comme  $S$  est localement fini, on conclut.

## 2. PREUVE DE L'IMPLICATION (i) $\Rightarrow$ (ii) DU THÉORÈME

Nous scindons la preuve de l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) en trois propositions qui, ensemble, la démontrent.

**PROPOSITION 1.** *Soient  $X$  un arbre, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut } X$ . Si  $G$  ne fixe aucun sommet, aucune arête, et aucun bout de  $X$ , alors  $G$  contient une translation.*

**PROPOSITION 2.** *Soient  $X$  un arbre, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut } X$  contenant une translation. Si  $G$  ne fixe aucun bout et aucune paire de bouts de  $X$ , alors  $G$  contient deux translations d'axes disjoints.*

**PROPOSITION 3.** *Soient  $a, b$  deux translations d'axes disjoints dans un arbre  $X$ . Le sous-groupe  $H = \langle a, b \rangle$  engendré par  $a$  et  $b$  est libre sur les deux générateurs  $a, b$ ; de plus  $H$  agit librement sur  $X$ .*

*Remarques.* 1) Les trois propositions ci-dessus montrent que l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) du Théorème est en fait vraie pour tout arbre, sans hypothèse

de locale finitude. Nous verrons au § 6 qu'il en est de même pour l'implication réciproque.

2) La proposition 1 est due à Tits ([T1], Proposition 3.4; voir aussi [Ti], Proposition 2.4, pour le cas des arbres réels). La proposition 2 est de Culler et Morgan ([CM], Lemma 2.1). La première partie de la proposition 3 est due à Hausmann ([Ha], Proposition 3.5); elle apparaît aussi, comme d'ailleurs la proposition 2, dans une preuve de Nebbia ([N2], p. 373). La seconde partie de la proposition 3 a été obtenue par Culler et Morgan ([CM], Lemma 2.6) avec une preuve très différente de la nôtre.

## 2.a. PREUVE DE LA PROPOSITION 1

Nous allons montrer que, si le sous-groupe  $G$  de  $\text{Aut } X$  ne contient pas de translation, alors  $G$  agit sur l'arbre  $X$  en fixant ou un sommet, ou une arête, ou un bout de  $X$ .

Nous commençons par utiliser une astuce standard pour pouvoir supposer que  $G$  ne contient pas d'inversion: pour cela, nous considérons le premier subdivisé barycentrique  $Y$  de  $X$ , c'est-à-dire l'arbre  $Y$  obtenu en ajoutant un sommet en chaque milieu d'arête de  $X$ . Il est clair que  $G$  peut être vu comme sous-groupe de  $\text{Aut } Y$ , et que  $G$  ne contient pas d'inversion de  $Y$ . Notre hypothèse entraîne donc que  $G$  consiste exclusivement en rotations de  $Y$ . Le lemme 2 montre que, quels que soient les éléments  $g, h$  de  $G$ , les sous-arbres  $Y^g$  et  $Y^h$  se rencontrent. Considérons l'action de  $G$  sur  $\bar{Y} = Y \coprod \Omega(Y)$ , et remarquons que  $\Omega(Y)$  s'identifie canoniquement à  $\Omega(X)$ . Le lemme 5 montre alors que  $\cap_{g \in G} \bar{Y}^g \neq \emptyset$ . En d'autres termes,  $G$  possède un point fixe dans  $\bar{Y}$ ; ce point fixe correspond soit à un sommet de  $X$ , soit à une arête de  $X$ , soit à un bout de  $X$ . La preuve est donc terminée.

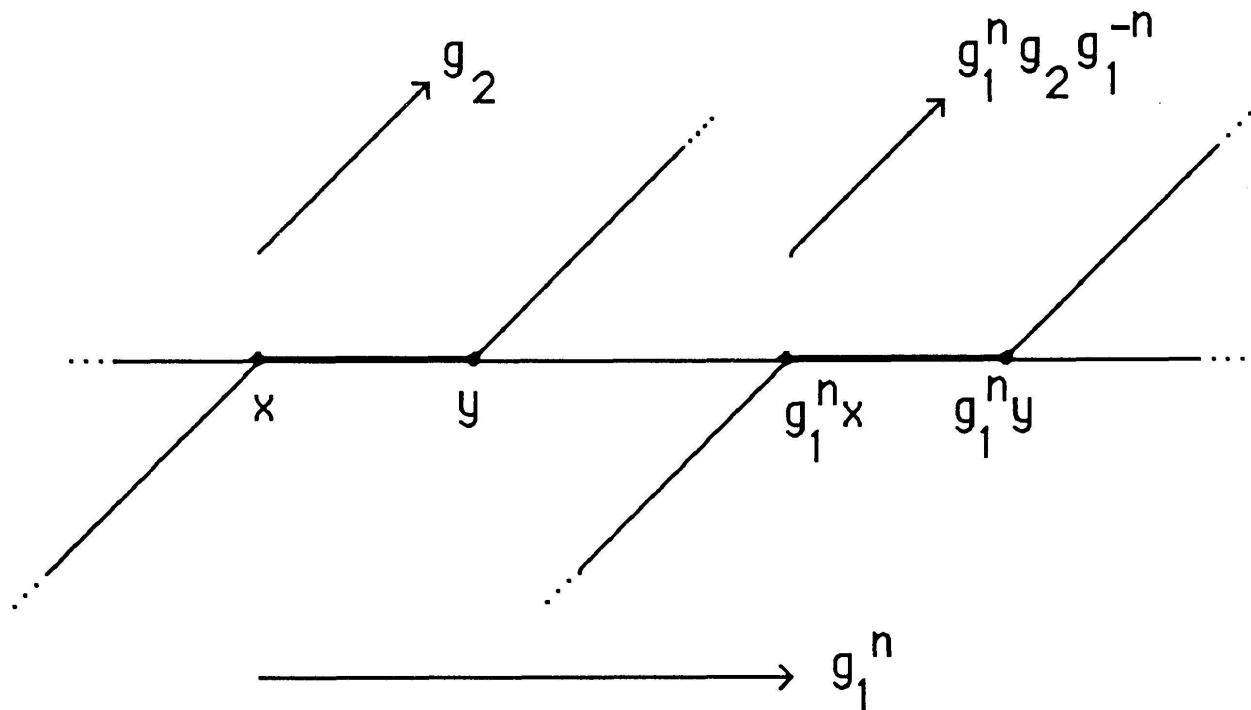
*Remarque.* Jointe au lemme 1, la première partie du raisonnement ci-dessus permet de retrouver le fait que, si  $G$  est un sous-groupe finiment engendré de  $\text{Aut } X$  ne contenant pas de translation, alors  $G$  fixe un sommet ou une arête de  $X$  (voir [Se], Corollaire 3 de I.6.5; [T3], 2.2.3).

## 2.b. PREUVE DE LA PROPOSITION 2

Nous dirons que deux translations d'un arbre sont *transverses* si l'intersection de leurs axes est finie.

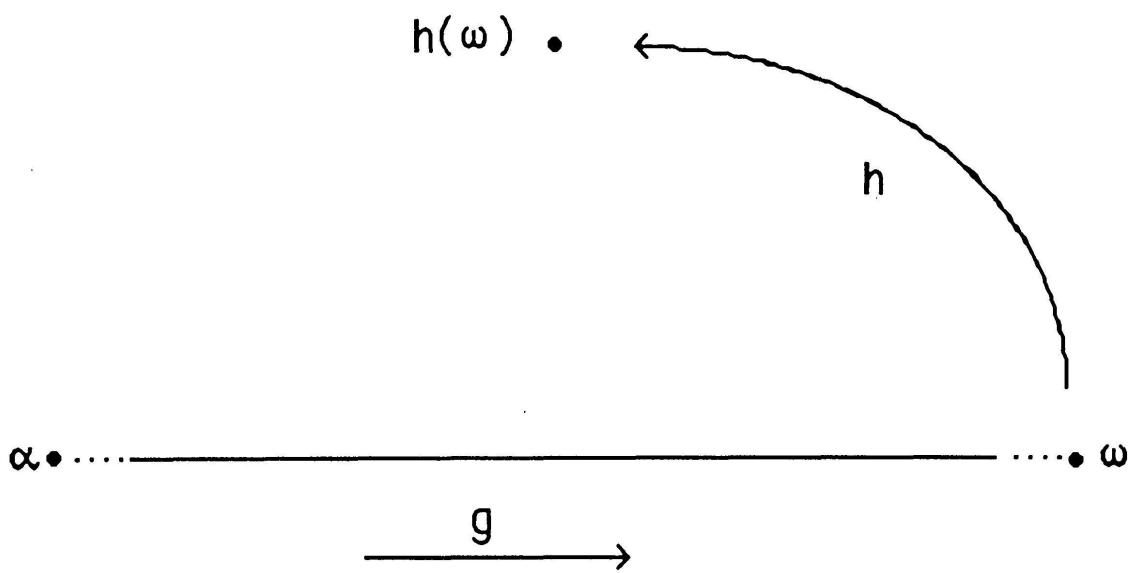
LEMME 6. *Soient  $g_1, g_2$  deux translations transverses; le sous-groupe  $\langle g_1, g_2 \rangle$  de  $\text{Aut } X$  engendré par  $g_1$  et  $g_2$  contient alors deux translations d'axes disjoints.*

*Preuve.* Si les axes de  $g_1$  et  $g_2$  sont disjoints, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que l'intersection de ces deux axes soit une géodésique  $[x, y]$ . Pour  $|n|$  assez grand,  $[x, y]$  et  $[g_1^n x, g_1^n y]$  sont disjoints.



Donc  $g_2$  et  $g_1^n g_2 g_1^{-n}$  sont des translations d'axes disjoints. Ceci termine la preuve du lemme 6.

Passons maintenant à la preuve de la proposition 2. Soit  $g$  une translation dans  $G$ ; notons  $[\alpha, \omega]$  son axe. Nous utiliserons constamment le fait que, si  $h \in G$ , alors  $hgh^{-1}$  est une translation d'axe  $[h(\alpha), h(\omega)]$ . Comme  $G$  ne fixe aucune paire de bouts de  $X$ , il existe  $h \in G$  tel que  $\{h(\alpha), h(\omega)\} \neq \{\alpha, \omega\}$ . Quitte à permuter les rôles de  $\alpha$  et  $\omega$ , on peut supposer  $h(\omega) \notin \{\alpha, \omega\}$ .

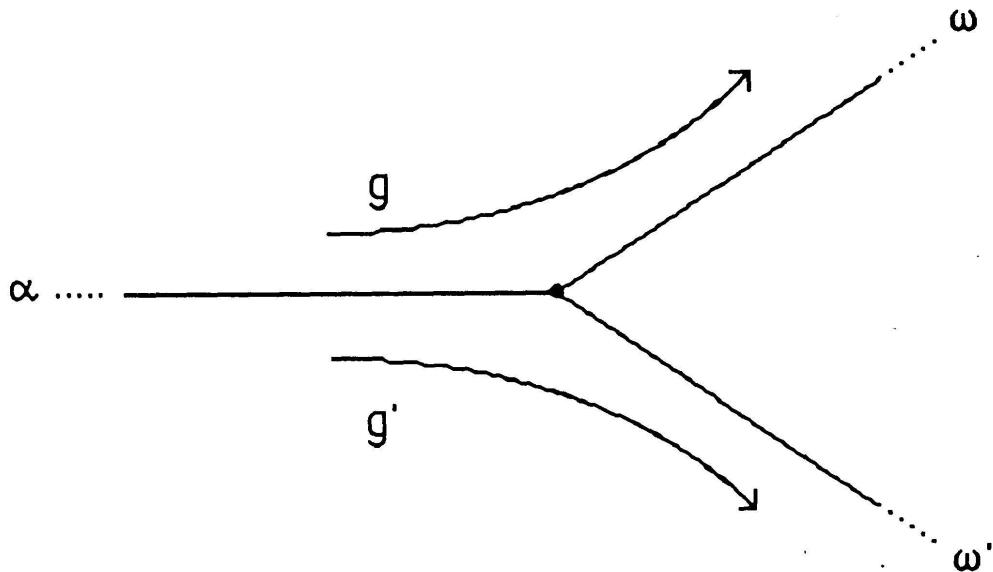


On distingue alors trois cas:

1)  $h(\alpha) \notin \{\alpha, \omega\}$ . Dans ce cas,  $g$  et  $hgh^{-1}$  sont transverses, et on applique le lemme 6.

2)  $h(\alpha) = \omega$ . Posons  $h' = gh$ ; donc  $h(\alpha) = h'(\alpha) = \omega$ . En utilisant le fait que  $\alpha$  et  $\omega$  sont les seuls points fixes de  $g$  dans  $\Omega(X)$ , on voit que les bouts  $\alpha, \omega, h(\omega), h'(\omega)$  sont deux à deux distincts, et qu'on ne peut avoir simultanément  $h^2(\omega) = \alpha$  et  $h'^2(\omega) = \alpha$ . Donc l'une au moins des intersections  $\{\alpha, \omega\} \cap \{h^2(\alpha), h^2(\omega)\}$  et  $\{\alpha, \omega\} \cap \{h'^2(\alpha), h'^2(\omega)\}$  est vide. En d'autres termes, ou bien  $g$  et  $h^2gh^{-2}$  sont transverses, ou bien  $g$  et  $h'^2gh'^{-2}$  sont transverses.

3)  $h(\alpha) = \alpha$ . Posons alors  $\omega' = h(\omega)$ , et  $g' = hgh^{-1}$ . Nous voulons considérer  $g$  et  $g'$  de manière symétrique.



Comme  $G$  ne fixe aucun bout de  $X$ , il existe  $k \in G$  tel que  $k(\alpha) \neq \alpha$ . En faisant quelques dessins, il est facile de voir que, parmi les quatre droites  $[\alpha, \omega]$ ,  $[\alpha, \omega']$ ,  $[k(\alpha), k(\omega)]$ ,  $[k(\alpha), k(\omega')]$ , on peut en trouver deux dont l'intersection est finie. Cela veut dire que, parmi les quatre translations  $g, g', kgk^{-1}, kg'k^{-1}$ , deux au moins sont transverses. Le lemme 6 permet une dernière fois de conclure.

## 2.c. PREUVE DE LA PROPOSITION 3

Nous commençons par un raffinement du «lemme du ping-pong» (voir [T2], Proposition 1.1; [H1], p. 130; [Ha], Proposition 3.1).

LEMME 7. Soit  $E$  un ensemble dans lequel on s'est donné deux sous-ensembles disjoints  $A$  et  $B$ ; soient  $a, b$  deux permutations de  $E$ . Notons  $A'$  (resp.  $B'$ ) l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'orbite sous  $\langle a \rangle$  (resp.  $\langle b \rangle$ ) est contenue dans  $A$  (resp.  $B$ ); notons encore  $Y$  le complémentaire de  $A \cup B$  dans  $E$ , et  $F$  la plus petite partie de  $E$  invariante sous  $H = \langle a, b \rangle$ , et contenant  $A' \cup B' \cup Y$ . On fait les hypothèses suivantes:

- a)  $A'$  et  $B'$  sont non vides, et l'action de  $\langle a \rangle$  (resp.  $\langle b \rangle$ ) sur  $A'$  (resp.  $B'$ ) est libre;
- b) Pour tout  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :  $a^m(B \cup Y) \subseteq A$  et  $b^m(A \cup Y) \subseteq B$ .

Alors le groupe  $H$  est libre sur les deux générateurs  $a$  et  $b$ ; de plus  $H$  agit librement sur  $F$ .

*Preuve du lemme 7.* Nous allons démontrer simultanément les deux assertions, en remarquant pour la seconde qu'il suffit de montrer que tout élément  $x$  de  $A' \cup B' \cup Y$  a un stabilisateur trivial dans  $H$ . Soit donc  $w$  un élément de  $H$  qui s'écrit comme un mot non trivial en  $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ . Il y a trois cas à considérer.

- 1)  $x \in A'$ : on peut supposer vu l'hypothèse (a) que  $w$  n'est pas une puissance de  $a$ ; on considère alors quatre sous-cas:

- a)  $w$  commence et finit par une puissance de  $b$ ; du fait de l'hypothèse (b):  $wx \in B$ , et en particulier  $wx \neq x$ .
- b)  $w$  commence par une puissance de  $b$  et finit par une puissance de  $a$ . On peut donc écrire  $w = ha^m$ , où  $h$  est comme en a). Comme  $a^m x \in A'$ , on a  $wx = ha^m x \in B$ , donc  $wx \neq x$ .
- c)  $w$  commence par une puissance de  $a$  et finit par une puissance de  $b$ . Alors  $w^{-1}$  est comme en b), et par conséquent  $w^{-1}x \neq x$ , donc  $wx \neq x$ .
- d)  $w$  commence et finit par une puissance de  $a$ . On peut écrire  $w = a^n g$ , avec  $g$  comme en b). Si on avait  $wx = x$ , on aurait  $gx = a^{-n}x$ , ce qui est absurde puisque  $gx \in B$  et  $a^{-n}x \in A'$ .

On a en particulier montré que  $w \neq 1$  si  $w$  est un mot non trivial en  $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ ; donc  $H$  est libre sur les deux générateurs  $a$  et  $b$ .

- 2)  $x \in B'$ : ce cas est symétrique du cas 1).

- 3)  $x \in Y$ : on a  $wx \in A$  (resp.  $wx \in B$ ) si  $w$  commence par une puissance de  $a$  (resp.  $b$ ); *a fortiori*  $wx \neq x$ . Ceci termine la preuve du lemme 7.

Pour démontrer la proposition 3, considérons le pont  $[p, q]$  qui joint l'axe de  $a$  à l'axe de  $b$ , et considérons la partition de  $X$  associée à  $[p, q]$ :

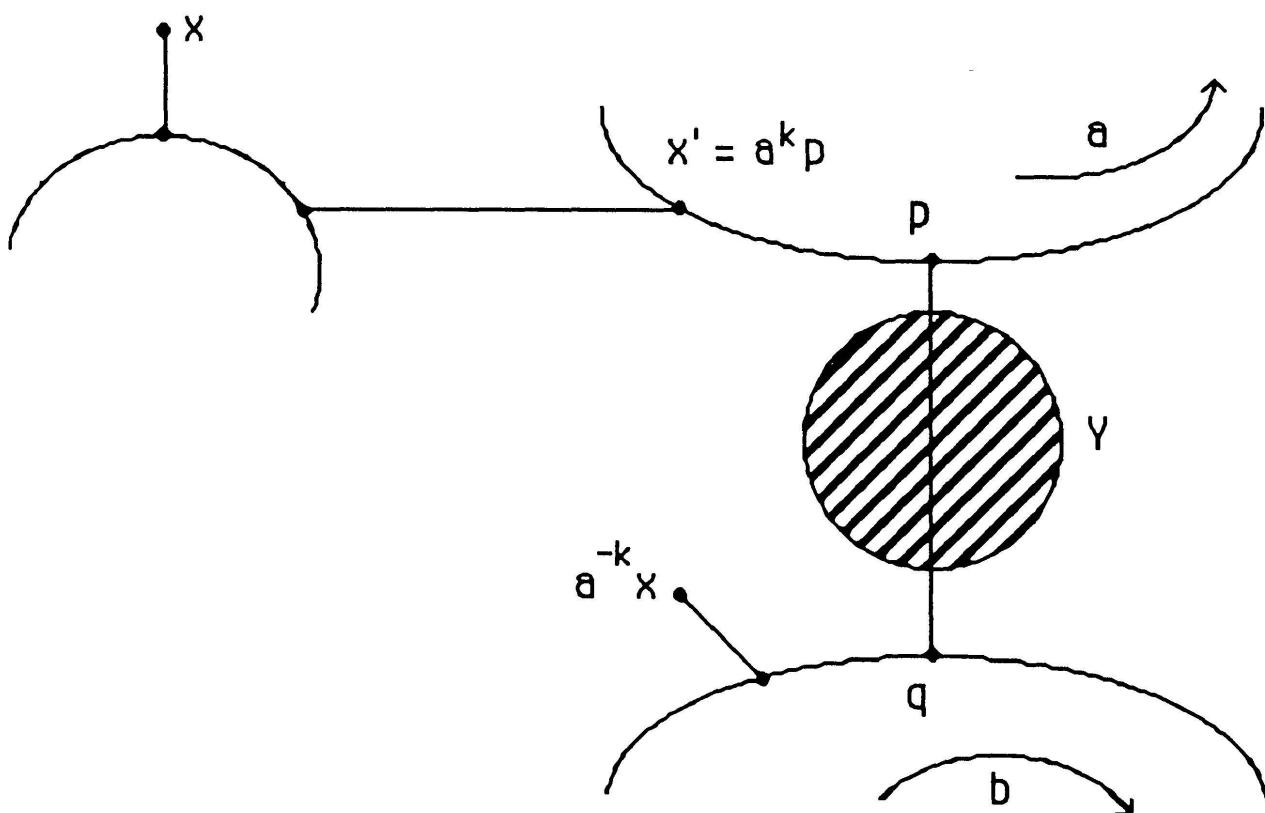
$$A = f_{pq}^{-1}\{p\}; \quad B = f_{pq}^{-1}\{q\}; \quad Y = X - (A \cup B)$$

(où  $f_{pq}$  est définie comme au § 1). Nous allons appliquer le lemme 7 à cette partition de  $X$ . Remarquons que  $A'$  est non vide, puisque  $A'$  contient l'axe de  $a$ ; il en va symétriquement pour  $B$ . Les autres hypothèses du lemme 7 se vérifient immédiatement, et le lemme 7 s'applique donc pour montrer que  $H = \langle a, b \rangle$  est un groupe libre sur les deux générateurs  $a$  et  $b$ , agissant librement sur la partie  $F$  qui est le saturé par  $H$  de  $A' \cup B' \cup Y$ . Il reste à montrer que  $F = X$ .

Choisissons pour cela un réel  $r$  tel que  $0 < r \leq \min\{l(a), l(b)\}$ . Pour  $n \in \mathbf{N}$ , appelons  $C_n$  l'ensemble des sommets de  $X$  dont la distance à  $Y \cup [p, q]$  est inférieure ou égale à  $nr$ , et montrons par récurrence sur  $n$  que  $C_n$  est contenu dans  $F$ , le cas  $n = 0$  étant clair. Soient donc  $n > 0$ , et  $x$  un sommet dans  $C_n$ ; vu la symétrie entre  $A$  et  $B$ , on peut supposer que  $x$  est dans  $A$ . Soit  $[x, x']$  le pont qui joint  $\{x\}$  à l'axe de  $a$ . Si  $x'$  n'est pas dans l'orbite de  $p$  sous  $\langle a \rangle$ , ou si  $x' = p$ , alors  $x$  est dans  $A'$ , donc dans  $F$ . Supposons donc  $x' = a^k p$ , avec  $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ , et considérons le sommet  $a^{-k} x$ , qui est dans  $A' \cup B \cup Y$ . Si  $a^{-k} x \in A' \cup Y$ , alors  $x \in F$ ; si  $a^{-k} x \in B$  (cas illustré ci-dessous), alors la distance de  $a^{-k} x$  à  $Y \cup [p, q]$  est la distance de  $a^{-k} x$  à  $q$ , et

$$d(a^{-k} x, q) < d(x, p) - d(x', p) = d(x, p) - |k| \cdot l(a) \leq (n-1)r$$

Ainsi  $a^{-k} x$  est dans  $C_{n-1}$ , et l'hypothèse de récurrence permet de conclure.



*Remarque.* Si l’arbre  $X$  est localement fini, on peut donner une preuve différente du fait que  $H$  agit librement sur  $X$ . Grâce au lemme 7, on sait déjà que  $H$  est libre et qu’il existe au moins un sommet dont le stabilisateur dans  $H$  soit trivial (prendre par exemple un sommet sur l’axe de  $a$ ). Par le lemme 3,  $H$  est un sous-groupe discret de  $\text{Aut } X$ . Si  $x$  est un sommet quelconque, le sous-groupe  $H \cap (\text{Aut } X)_x$  est discret dans le groupe compact  $(\text{Aut } X)_x$ , donc  $H \cap (\text{Aut } X)_x$  est fini. Comme  $H$  est libre,  $H \cap (\text{Aut } X)_x$  est trivial.

### 3. PREUVES DES IMPLICATIONS (ii) $\Rightarrow$ (iii) ET (iii) $\Rightarrow$ (iv) DU THÉORÈME MOYENNABILITÉ

L’implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) résulte immédiatement du lemme 3. Nous donnons maintenant quelques rappels sur la moyennabilité qui rendront évidente l’implication (iii)  $\Rightarrow$  (iv).

Soit  $G$  un groupe localement compact. On dit que  $G$  est *moyennable* si, chaque fois que  $G$  opère de manière affine et continue sur un convexe compact non vide  $C$  dans un espace vectoriel topologique localement convexe, il existe dans  $C$  un point fixe pour l’action de  $G$ . Comme références sur la moyennabilité, nous recommandons la petite monographie de Greenleaf [Gl], le livre de Paterson [Pa], et l’article remarquable d’efficacité d’Eymard [Ey]; à propos de la moyennabilité des groupes discrets, l’article original de von Neumann [vN] vaut la peine d’être lu; pour l’évolution historique de la notion, on consultera avec profit le livre de Pier ([Pi], Chapitre 9). Nous rassemblons maintenant sans démonstration quelques faits classiques sur la moyennabilité.

MOY A: Un groupe abélien est moyennable (c’est le théorème de Markoff-Kakutani, voir [Bo], Appendice du Chapitre IV).

MOY B: La moyennabilité est préservée par extensions; en d’autres termes, si  $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1$  est une suite exacte courte de groupes localement compacts avec  $N$  et  $G/N$  moyennables, alors  $G$  est moyennable (voir [Ey], II.1; [Gl], Theorem 2.3.3).

MOY C: La moyennabilité est préservée par limites inductives (voir [Gl], Theorem 2.3.4).

MOY D: Un groupe compact est moyennable.

MOY E: Un sous-groupe fermé d’un groupe moyennable est moyennable (voir [Ey], IV; [Gl], Theorem 2.3.2).