Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOUS-GROUPES LIBRES DANS LES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES

Autor: Pays, Isabelle / Valette, Alain

Kapitel: 0. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58735

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 151-174

SOUS-GROUPES LIBRES DANS LES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES

par Isabelle PAYS et Alain VALETTE

«Auprès de mon arbre, je vivais heureux...
J'aurais jamais dû m'éloigner d'mon arbre»

Georges Brassens

0. INTRODUCTION

Si $\mathscr{C}$ est une classe de groupes, nous dirons que $\mathscr{C}$ *satisfait l'alternative de Tits* si tout groupe de $\mathscr{C}$ ou bien contient un sous-groupe résoluble d'indice fini, ou bien contient un sous-groupe libre non abélien. La terminologie fait bien sûr référence au fameux résultat de Tits ([T2], Theorem 1 et Corollary 1) qui assure que l'alternative est satisfaite par la classe des groupes linéaires en caractéristique nulle, ainsi que par la classe des groupes finiment engendrés linéaires en caractéristique positive. Par la suite, l'alternative a été établie, parfois sous des formes plus précises, pour de nombreuses classes intéressantes; citons la classe des sous-groupes des groupes d'isotopie de difféomorphismes de surfaces ([Mc], Theorem A), la classe des sous-groupes des groupes hyperboliques au sens de Gromov ([Gr], § 3.1; [GH], Théorème 37 du Chapitre 8), la classe des produits à un relateur de groupes cycliques [FLR] [1]). Mentionnons encore une preuve élémentaire de l'alternative pour la classe des groupes de Coxeter [H2], et des bornes sur l'indice d'un sous-groupe résoluble d'indice fini dans un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ sans sous-groupe libre non abélien [Wa].

Dans le présent travail, on s'intéresse à la classe des sous-groupes du groupe des automorphismes d'un arbre localement fini. Si l'on se fie à la philosophie selon laquelle les groupes d'automorphismes d'arbres ont beaucoup d'ana-

[1]) Plus précisément, il s'agit des groupes ayant une présentation de la forme

$$< a_1, a_2, \ldots, a_n;\ a_i^{e_i} = 1 (i = 1, \ldots, n),\ R^m = 1 >$$

où $n \geqslant 2, m \geqslant 2, 2 \leqslant e_i \leqslant \infty (i = 1, \ldots, n)$, et R est un mot cycliquement réduit où apparaissent tous les a_i.

logies avec les groupes linéaires (voir [C1] ou l'introduction de [Se] – ces analogies sont à la base de l'analyse harmonique sur les arbres, cf. [C2], [N1], [Sz], [V1]), il paraît naturel de se demander si la classe des sous-groupes des groupes d'automorphismes d'arbres localement finis satisfait l'alternative de Tits. Mais la réponse est *négative*: en effet, pour tout premier p impair, Gupta et Sidki [GS] ont construit dans le groupe des automorphismes de l'arbre homogène de degré $p + 1$ un sous-groupe Γ_p sur deux générateurs qui est un p-groupe infini: Γ_p ne contient aucun groupe libre non trivial (c'est un groupe de torsion), et ne contient aucun sous-groupe résoluble d'indice fini (un p-groupe résoluble et finiment engendré est fini)[2]).

Ce résultat semble indiquer qu'une caractérisation algébrique des sous-groupes du groupe des automorphismes d'un arbre localement fini qui contiennent un sous-groupe libre non abélien sera compliquée. Par contraste, il peut être intéressant de savoir qu'il existe une caractérisation simple des sous-groupes qui contiennent un groupe libre non abélien *agissant librement* (au sens où les stabilisateurs des sommets de l'arbre dans ce groupe libre sont triviaux)[3]). Cette caractérisation est notre résultat principal.

THÉORÈME. *Soient* X *un arbre localement fini, et* G *un sous-groupe de* $\operatorname{Aut} X$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) G *ne fixe aucun sommet, aucune arête, aucun bout et aucune paire de bouts de* X*;*

ii) G *contient un sous-groupe libre non abélien qui agit librement sur* X*;*

iii) G *contient un sous-groupe libre non abélien discret dans* $\operatorname{Aut} X$*;*

iv) *L'adhérence* $\bar{G}$ *de* G *dans* $\operatorname{Aut} X$ *n'est pas moyennable.*

Nous renvoyons au § 1 pour les rappels nécessaires sur la géométrie des arbres et de leurs automorphismes. Signalons cependant que les points (iii) et (iv) du théorème doivent se comprendre comme suit: comme X est localement fini, la topologie de la convergence simple sur les sommets de X fait de $\operatorname{Aut} X$ un groupe localement compact. La condition (iv) exprime ainsi que le groupe localement compact $\bar{G}$ n'est pas moyennable.

---

[2]) Dans une version antérieure de l'article, nous présentions comme une conjecture le fait que la classe des sous-groupes des groupes d'automorphismes d'arbres localement finis satisfait l'alternative de Tits. Nous sommes reconnaissants à H. Bass et A. Lubotzky de nous avoir indiqué la référence [GS].

[3]) Pour un exemple d'arbre dont le groupe des automorphismes contient un sous-groupe libre non abélien agissant non librement, voir la proposition 2 de [V2].

Nous avions démontré le théorème ci-dessus quand nous avons réalisé qu'il était presque entièrement dû à Nebbia ([N2], Theorem 1); Nebbia était surtout préoccupé par la non-moyennabilité des sous-groupes fermés de Aut X, de sorte qu'il n'a énoncé que l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv), et ce pour les sous-groupes fermés de Aut X; mais l'extension aux sous-groupes quelconques est immédiate. Quant à l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv), elle transparaît dans la preuve (voir d'ailleurs la remarque 3 à la page 375 de [N2]). Mentionnons aussi que Woess a montré comment modifier l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) quand on s'intéresse aux sous-groupes du groupe des automorphismes d'un graphe localement fini ([Wo], Theorems 1, 2).

D'autres portions du théorème apparaissent ailleurs dans la littérature; ainsi, l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) a été obtenue par Culler et Morgan ([CM], Theorem 2.7), dans le contexte plus général des arbres réels, mais sous l'hypothèse supplémentaire que le groupe G contient un automorphisme hyperbolique. Cette hypothèse est en fait superflue, comme le montre un résultat de Tits ([T1], Proposition 3.4) dans le cas des arbres ordinaires, et un résultat de Tignol ([Ti], Proposition 2.4) dans le cas des arbres réels[4]). Notre apport consiste donc essentiellement à donner une présentation unifiée de tous ces résultats, à simplifier les preuves, et à relier les résultats à quelques problèmes classiques.

L'article se présente comme suit: au §1, nous donnons les rappels nécessaires sur les arbres, leurs automorphismes, et leurs bouts. La preuve du théorème occupe les §§2 à 4, selon le schéma (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i); nous avons aussi regroupé au §3 quelques rappels sur la moyennabilité. Le §5 est consacré aux corollaires du théorème. Enfin, au §6, nous discutons le cas des arbres réels, et montrons que l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) du théorème subsiste pour les groupes d'isométries de ces espaces.

1. Rappels sur les arbres

Un *arbre* X est un graphe connexe sans circuit (les graphes que nous considérons sont toujours non orientés, sans boucle ni arête multiple). L'arbre X est *localement fini* si tout sommet n'a qu'un nombre fini de voisins. Si x, y sont des sommets d'un arbre X, il existe un unique chemin d'arêtes

---

[4]) Attention à l'énoncé donné dans l'introduction de l'article de Culler et Morgan, où l'hypothèse supplémentaire a été omise! (Comparer dans [CM] le théorème au milieu de la page 573 avec le théorème 2.7, pp. 582-583).