

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LONGUEUR STABLE DES COMMUTATEURS
Autor: Bavard, Christophe
Kapitel: 3. Longueur stable et cohomologie bornée
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58734>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

3. LONGUEUR STABLE ET COHOMOLOGIE BORNÉE

Comme préliminaire on étudie l'espace des bords $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$. Ceci est justifié par le fait qu'il relie longueur stable et cohomologie bornée: d'une part $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ est muni d'une norme comparable à la longueur stable (proposition 3.2), et d'autre part cet espace s'interprète par dualité à partir de la cohomologie bornée (3.4).

3.1. L'ESPACE DES BORDS

On rappelle la définition de l'homologie, ici à valeurs réelles, d'un groupe *discret* par la «bar-résolution». Soit $C_n(\Gamma, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel de base $\Gamma^n (n \geq 1)$ et soit l'opérateur bord $\partial: C_{n+1}(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow C_n(\Gamma, \mathbf{R})$ donné par

$$\begin{aligned} & \partial(x_1, \dots, x_{n+1}) \\ = & (x_2, \dots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i (x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

L'homologie $H_*(\Gamma, \mathbf{R})$ est alors celle du complexe

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_2(\Gamma, \mathbf{R}) \xrightarrow{\partial} C_1(\Gamma, \mathbf{R}) \xrightarrow{0} \mathbf{R} \xrightarrow{0} 0 \quad (\mathcal{C}).$$

L'espace des 1-bords, noté $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$, est l'ensemble des combinaisons finies de la forme

$$\sum_i \alpha_i (x_i - x_i y_i + y_i) \quad \alpha_i \in \mathbf{R}, x_i, y_i \in \Gamma.$$

Soit $Z_2(\Gamma, \mathbf{R})$ le noyau de $\partial: C_2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow C_1(\Gamma, \mathbf{R})$ (espace des 2-cycles). L'isomorphisme $B_1(\Gamma, \mathbf{R}) \approx C_2(\Gamma, \mathbf{R})/Z_2(\Gamma, \mathbf{R})$ induit sur $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ une norme simpliciale quotient:

$$\|b\|_B = \inf \left\{ \sum_i |\alpha_i|; \partial \left(\sum_i \alpha_i (x_i, y_i) \right) = b \right\} \quad (b \in B_1(\Gamma, \mathbf{R}))$$

borne inférieure sur les 2-chaînes de bord b .

Par ailleurs, les bords *entiers* $b \in B_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ ont aussi une «norme» entière:

$$|b|_Z = \inf \left\{ \sum_i |n_i|; \partial \left(\sum_i n_i (x_i, y_i) \right) = b \quad \text{et} \quad n_i \in \mathbf{Z} \right\}$$

et la norme réelle de b est donnée par

$$\|b\|_B = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|kb|_Z}{k} \quad ((b \in B_1(\Gamma, \mathbf{Z})).$$

3.2. LONGUEUR STABLE ET NORME SUR L'ESPACE DES BORDS

Remarquons d'abord que le groupe dérivé Γ' est inclus dans l'espace des bords $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ car

$$(8) \quad [x, y] = \partial\{([x, y], y) + (xyx^{-1}, x) - (x, y)\} \quad (x, y \in \Gamma).$$

Il est donc naturel de comparer la longueur stable $\|\gamma\|$ d'un élément γ de Γ' avec sa norme $\|\gamma\|_B$ dans $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$:

$$\text{PROPOSITION 3.2.} \quad 4\|\gamma\| - 1 \leq \|\gamma\|_B \leq 4\|\gamma\| + 1 \quad (\gamma \in \Gamma').$$

Avant d'aborder la preuve de la proposition, voyons comment la combinatoire d'une relation

$$b = \partial\left(\sum_i \varepsilon_i(x_i, y_i)\right) \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

peut être décrite au moyen d'une surface. On pense à chaque $\varepsilon(x, y)$ qui intervient ci-dessus comme à un simplexe géométrique orienté (fig. 8):

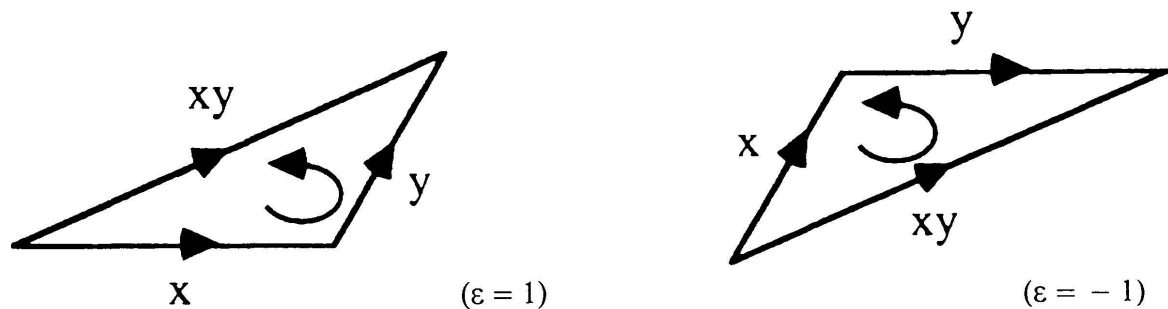


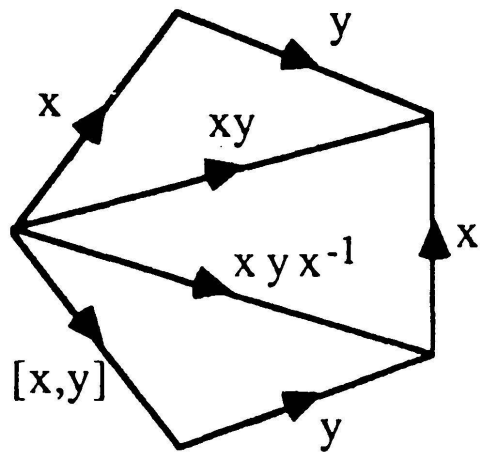
FIGURE 8

Choisissons une façon de grouper par paires $\{x, -x\}$ les arêtes qui s'annulent dans la relation; il suffit alors d'identifier 2 à 2 les arêtes ainsi sélectionnées pour construire une surface à bord (abstraite) Σ orientée et triangulée, *a priori* non connexe et non unique. Noter que si on pose

$$b = \sum_j n_j z_j \quad (n_j \in \mathbf{Z}, z_j \in \Gamma)$$

le nombre de composantes connexes du bord de Σ est au plus égal à $\sum_j |n_j|$.

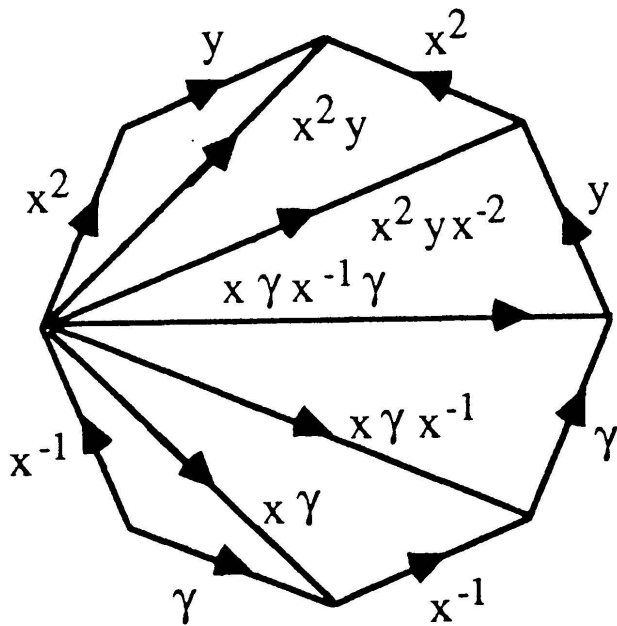
On dira que Σ borde b . Une surface bordant b et formée de $|b|_{\mathbf{Z}}$ simplexes sera appelée *minimisante* pour b . Ainsi le fait qu'un commutateur soit le bord de 3 simplexes s'illumine (fig. 9):



(surface de genre 1)

FIGURE 9

La longueur des commutateurs $c(\gamma)$ est le genre minimal d'une telle surface connexe bordant γ ($\gamma \in \Gamma'$). Voici encore un exemple: $2[x, y]$ bordé par une surface de genre 1 ayant 2 composantes du bord:



($\gamma = [x, y]$)

FIGURE 10

Preuve de la proposition. Comme $\|\gamma\|_B = \lim_{k \rightarrow \infty} (|k\gamma|_Z/k)$ (voir 3.1), la preuve consiste à relier $|k\gamma|_Z$ avec $c(\gamma^k)$ ($k \in \mathbf{N}^*$). Il faut bien distinguer les éléments γ^k et $k\gamma$ qui sont, par définition, linéairement indépendants dans $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$.

D'après la relation (8) tout produit de N commutateurs est le bord de $4N - 1$ simplexes, d'où $|\gamma^k|_Z \leq 4c(\gamma^k) - 1$. En remplaçant le simplexe qui contient γ^k par k simplexes contenant γ (fig. 11), on voit que

$$|k\gamma|_Z \leq 4c(\gamma^k) + k - 2.$$

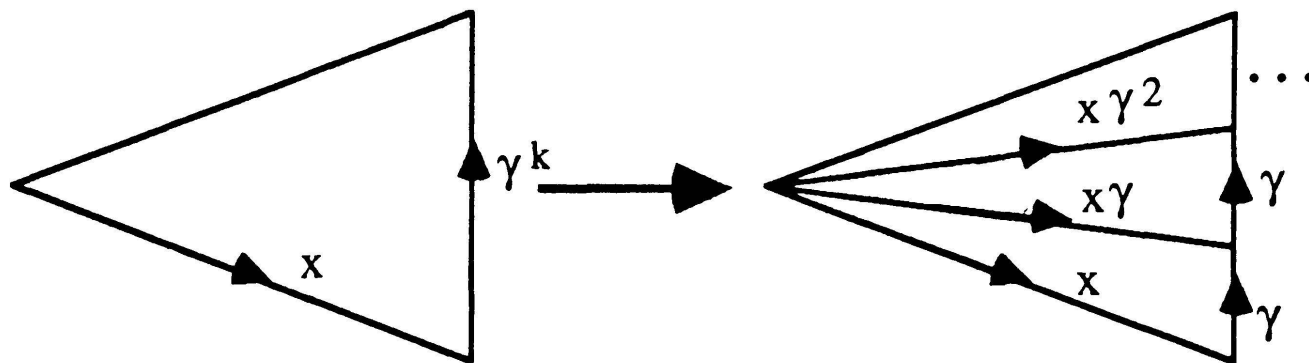


FIGURE 11

Il reste à établir une inégalité dans l'autre sens:

Affirmation. $4c(\gamma^k) - k \leq |k\gamma|_Z \quad (\gamma \in \Gamma')$.

Une fois que l'affirmation sera démontrée, la proposition résultera de l'encadrement:

$$4c(\gamma^k) - k \leq |k\gamma|_Z \leq 4c(\gamma^k) + k - 2.$$

Preuve de l'affirmation. Supposons d'abord que $k\gamma$ est bordé par une surface Σ minimisante *connexe*. Soit g le genre de Σ et r le nombre de composantes connexes de son bord. Un petit calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré permet de minorer $|k\gamma|_Z$. En effet considérons une triangulation de Σ qui comprend s sommets, a arêtes, f faces et exactement k arêtes sur le bord; on a les relations

$$2 - 2g - r = s - a + f \quad \text{et} \quad 3f = 2a - k.$$

D'où $f = 4g - 4 + 2r + 2s - k$. Sachant qu'une telle triangulation doit comprendre au moins k sommets (ceux qui sont sur le bord) on en déduit l'inégalité

$$(9) \quad f \geq 4g - 4 + 2r + k.$$

Notons par ailleurs $k_i (i = 1, \dots, r)$ le nombre d'arêtes sur la i -ème composante du bord ($\sum_i k_i = k$). L'hypothèse signifie algébriquement qu'un certain produit

$$a_1(\gamma^{k_1}) \dots a_{r-1}(\gamma^{k_{r-1}})\gamma^{k_r} \quad (a_i \in \Gamma, i = 1, \dots, r-1)$$

est produit de g commutateurs de Γ (on rappelle la notation $xy = xyx^{-1}$).
L'identité

$$a_1 x_1 a_2 x_2 \dots a_n x_n = [a_1, x_1]^{x_1} [a_2, x_2] \dots^{(x_1 x_2 \dots x_{n-1})} [a_n, x_n] x_1 \dots x_n$$

montre alors que $g \geq c(\gamma^k) - r + 1$. Compte tenu de (9), il en résulte que

$$|k\gamma|_Z \geq 4c(\gamma^k) - 2r + k.$$

Mais comme le nombre r de composantes connexes du bord de Σ est par construction au plus égal à k , on obtient finalement l'inégalité souhaitée.

Dans le cas général, une surface minimisante Σ se décompose en composantes connexes Σ_β ($\beta = 1, \dots, \alpha$) et l'on a

$$|k\gamma|_Z = \sum_{\beta=1}^{\alpha} |k_\beta \gamma|_Z \quad \left(\sum_{\beta=1}^{\alpha} k_\beta = k \right),$$

où chaque terme correspond à une composante, minimisante elle aussi. En appliquant ce qui précède, on trouve donc

$$|k\gamma|_Z \geq \sum_{\beta=1}^{\alpha} 4c(\gamma^{k_\beta}) - k.$$

L'inégalité évidente $\sum_{\beta=1}^{\alpha} c(\gamma^{k_\beta}) \geq c(\gamma^k)$ permet alors de conclure la preuve de l'affirmation.

3.3. QUASI-MORPHISMES ET COHOMOLOGIE BORNÉE

Après avoir rappelé la définition de la cohomologie bornée, on étudie le rapport entre les quasi-morphismes et le deuxième groupe de cohomologie bornée.

L'espace vectoriel $C_n(\Gamma, \mathbf{R})$ (voir 3.1) est muni de la norme simpliciale, de type l^1 . Son dual, noté $C_b^n(\Gamma, \mathbf{R})$, qui est l'espace des applications *bornées* $F: \Gamma^n \rightarrow \mathbf{R}$, hérite donc d'une norme l^∞ :

$$\|F\| = \sup\{|F(x_1, \dots, x_n)|; (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma^n\}.$$

Le complexe (\mathcal{C}) de 3.1 donne ainsi par dualité topologique un complexe dont l'homologie, avec sa semi-norme quotient, est par définition $H_b^*(\Gamma, \mathbf{R})$, la *cohomologie bornée* de Γ . Le dual algébrique de (\mathcal{C}) définit quant à lui la cohomologie usuelle $H^*(\Gamma, \mathbf{R})$ de Γ .

On a appelé quasi-morphisme toute application $f: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ dont le cobord df est borné:

$$|df(x, y)| = |f(x) - f(xy) + f(y)| \leq \|df\| \quad (x, y \in \Gamma).$$

Avec ce langage, le noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est naturellement l'espace des quasi-morphismes définis à l'addition d'un morphisme et d'une application bornée près. En fait chaque classe de ce noyau contient un élément privilégié: elle se représente de façon unique comme cobord $d\varphi$ d'un quasi-morphisme homogène φ ($\varphi(x^n) = n\varphi(x), x \in \Gamma, n \in \mathbf{Z}$).

PROPOSITION 3.3.1 ([Be]).

- 1) *Le noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est isomorphe par le cobord à l'espace des quasi-morphismes homogènes définis à l'addition d'un morphisme près.*
- 2) *Tout quasi-morphisme homogène φ est constant sur les classes de conjugaison ($\varphi(xyx^{-1}) = \varphi(x); x, y \in \Gamma$) et vérifie la formule asymptotique:*

$$d\varphi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varphi((x^n y^n (xy)^{-n})) \quad (x, y \in \Gamma).$$

Preuve (voir [Be]). Si f est un quasi-morphisme, la suite $(f(x^n))_{n \in \mathbf{N}}$ est presque sous-additive:

$$|f(x^{m+n}) - f(x^m) - f(x^n)| \leq \|df\| \quad (x \in \Gamma; m, n \in \mathbf{N}).$$

On en déduit (voir [P-S]) que $\frac{f(x^n)}{n}$ converge et sa limite (homogène!), notée $\varphi(x)$, vérifie l'inégalité

$$\left| \varphi(x) - \frac{f(x^n)}{n} \right| \leq \frac{\|df\|}{n} \quad (n \geq 1).$$

En particulier,

$$(10) \quad |\varphi(x) - f(x)| \leq \|df\|$$

d'où il résulte que $d\varphi$ et df représentent la même classe de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$.

On remarque ensuite que $xy^n x^{-1} - y^n (n \in \mathbf{Z})$ est le bord de 2 simplexes (fig. 12):

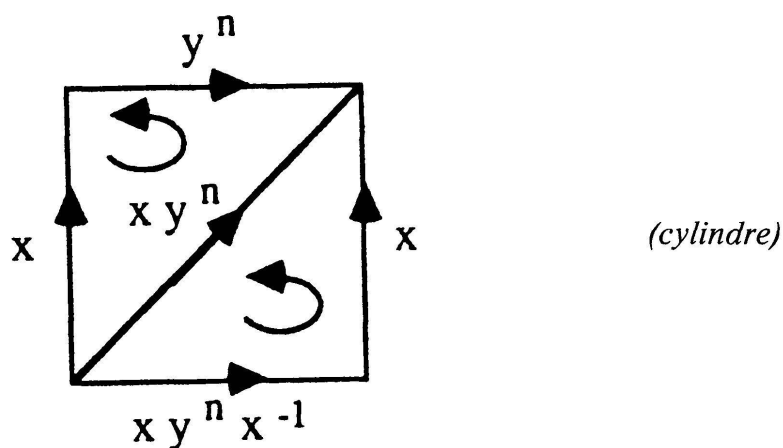


FIGURE 12

Ceci montre que $\varphi(xy^n x^{-1}) - \varphi(y^n)$ est borné par $2 \|d\varphi\|$, donc $\varphi(xy x^{-1}) - \varphi(y)$ (homogène en y) est nul.

La formule asymptotique est aussi une conséquence de l'homogénéité. Ecrivons d'abord la relation

$$d\varphi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ \varphi(x^n) + \varphi(y^n) - \varphi((xy)^n) \}.$$

Comme $x^n + y^n - (xy)^n - x^n y^n (xy)^{-n}$ est le bord de 3 simplexes, cette limite est égale à $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ \varphi(x^n y^n (xy)^{-n}) \}$.

Les quasi-morphismes décrivent, par définition, le noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R})$, qui n'est qu'une partie de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. Cependant, dans beaucoup de cas intéressants, tels que les groupes fondamentaux de polyèdres finis, ce noyau est de codimension finie dans $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. De toutes façons, on peut toujours décrire $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ au moyen des quasi-morphismes définis sur un groupe ad hoc:

PROPOSITION 3.3.2. *Tout groupe Γ admet une extension centrale $E \rightarrow \Gamma$ qui induit une isométrie: $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \approx \text{Ker}(H_b^2(E, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(E, \mathbf{R}))$ (en fait ce noyau est égal à $H_b^2(E, \mathbf{R})$ tout entier).*

Preuve. Ecrivons Γ comme quotient d'un groupe libre L par un sous-groupe normal R . On a alors une suite exacte

$$0 \rightarrow R/[L, R] \rightarrow L/[L, R] \rightarrow L/R = \Gamma \rightarrow 1.$$

Cette suite définit une extension centrale $p: E = L/[L, R] \rightarrow \Gamma$, qui dépend du choix de la présentation de Γ .

Comme le noyau de l'extension E est abélien (donc moyennable) on sait d'après un théorème général sur la cohomologie bornée ([Iv]), que p induit une isométrie $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \approx H_b^2(E, \mathbf{R})$. Pour établir la proposition, il suffit donc de prouver que l'application $p^*: H^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(E, \mathbf{R})$ induite par p en cohomologie usuelle est nulle.

Soit c un 2-cocycle normalisé sur Γ , à valeurs réelles; le cocycle p^*c définit une extension centrale $\pi: \mathcal{E} \rightarrow E$. Plus précisément, \mathcal{E} est l'ensemble $\mathbf{R} \times E$ muni de la loi de groupe:

$$(\alpha, X)(\beta, Y) = (\alpha + \beta + c(p(X), p(Y)), XY) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ et } X, Y \in E),$$

et π est la projection $\mathbf{R} \times E \rightarrow E$. Il est facile de vérifier que l'extension $p \circ \pi: \mathcal{E} \rightarrow \Gamma$ est centrale. Comme L est un groupe libre, il existe un morphisme de groupes $L \rightarrow E$ au-dessus de Γ ; puisque l'extension $p \circ \pi$ est centrale, ce morphisme induit un morphisme $u: E \rightarrow \mathcal{E}$ au-dessus de Γ . On a donc

$$u(X) = (\alpha(X), a(X)X) \quad \alpha(X) \in \mathbf{R}, a(X) \in \text{Ker } p.$$

En explicitant le fait que u est un morphisme de groupes, on trouve la relation

$$\alpha(XY) = \alpha(X) + \alpha(Y) + c(p(X), p(Y)) \quad (X, Y \in E),$$

c'est-à-dire $p^*c = -d\alpha$.

Il est intéressant de noter que dans notre situation, l'isométrie $p_b^*: H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \approx H_b^2(E, \mathbf{R})$ admet un inverse explicite. Cela est dû au fait que le noyau A de l'extension E est central. En effet si φ est quasi-morphisme homogène $E \rightarrow \mathbf{R}$, on a d'après la formule asymptotique (Prop. 3.3.1-2)):

$$d\varphi(X, a) = 0 \quad X \in E, a \in A.$$

On en déduit que $d\varphi(aX, bY) = d\varphi(X, Y)$ pour $X, Y \in E$ et $a, b \in A$. Cette propriété permet d'associer à tout quasi-morphisme homogène φ sur E un 2-cocycle borné sur Γ en posant

$$(11) \quad c(x, y) = d\varphi(X, Y) \quad x, y \in \Gamma,$$

où X et Y sont des relevés quelconques de x et y dans E . D'où une application $H_b^2(E, \mathbf{R}) \rightarrow H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ qui est visiblement inverse à droite de p_b^* .

Remarque. Le fait que la semi-norme sur $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est une vraie norme ([M-M], [Mit]) apparaît clairement dans notre contexte. Pour une classe c représentable par le cobord df d'un quasi-morphisme, la relation (10) implique $\|d\varphi\| \leq 4\|df\|$, indépendamment du choix de f (rappel: $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n)/n$);

donc, si la semi-norme de c est nulle, φ est un morphisme et c est nulle. Le cas général résulte ensuite de la proposition 3.3.2.

3.4. LONGUEUR STABLE ET QUASI-MORPHISMES

Dans ce paragraphe, le dual de l'espace des bords $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ est décrit au moyen des quasi-morphismes: le théorème de Hahn-Banach permet alors (avec la proposition 3.2) d'exprimer la longueur stable par une formule de dualité:

PROPOSITION 3.4. *Pour tout élément γ de Γ' on a la relation*

$$4 \|\gamma\| = \sup_f \frac{|\varphi(\gamma)|}{\|df\|}$$

où f décrit l'ensemble des quasi-morphismes et $\varphi(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(\gamma^n)$.

Ce résultat montre en particulier que la minoration de la longueur des commutateurs par les quasi-morphismes (lemme 1.1) est optimale pour la longueur stable.

Preuve. L'espace des bords $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ a été considéré comme $C_2(\Gamma, \mathbf{R})/Z_2(\Gamma, \mathbf{R})$ avec la norme quotient: son dual est l'espace des quasi-morphismes f modulo les morphismes, muni de la norme $\|df\|$. D'après le théorème de Hahn-Banach, la norme d'un élément quelconque b de $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ est donnée par

$$\|b\|_B = \sup_f \frac{|f(b)|}{\|df\|}.$$

Considérons maintenant un élément γ de Γ' . La relation entre $\|\gamma\|$ et $\|\gamma\|_B$ (prop. 3.2) et l'inégalité (10) montrent alors que $4\|\gamma\| - \sup_f \frac{|\varphi(\gamma)|}{\|df\|}$ est borné par une constante, donc nul par homogénéité.

COROLLAIRE 1. *L'application $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est injective si et seulement si la longueur stable est nulle sur Γ' .*

En effet, la longueur stable est nulle si et seulement si tout quasi-morphisme homogène φ est nul sur Γ' , ce qui équivaut, d'après la formule asymptotique, à $d\varphi = 0$.

COROLLAIRE 2. *La longueur stable d'un groupe moyennable est nulle.*

On pourrait invoquer le fait que la cohomologie bornée d'un tel groupe est triviale ([Gr 2] ou [Iv]). Cependant il est facile de vérifier (voir [Be]) à l'aide d'une moyenne que tout quasi-morphisme sur un groupe moyennable est somme d'un morphisme et d'une application bornée.

Remarque. Il existe d'autres groupes ayant $\| \cdot \| \equiv 0$; ainsi $SL_3(\mathbf{Z})$ n'est pas moyennable et vérifie $c < \infty$ ([Ne]).

3.5. LONGUEUR STABLE ET GENRE DES CLASSES DE $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$

La formule de Hopf (voir ci-dessous) donne une description géométrique des classes de $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ au moyen des surfaces fermées: pour tout élément α de $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$, il existe une surface fermée S_g de genre g et un morphisme de $\pi_1(S_g)$ dans Γ qui envoie la classe fondamentale de S_g sur α . Le *genre* de α est le genre minimal d'une telle surface; on le note $g(\alpha)$.

Il se trouve que le genre d'une classe s'interprète comme nombre minimal de commutateurs grâce à l'extension de Hopf (12); je remercie Etienne Ghys qui m'a expliqué ce fait. Cela permet d'illustrer la formule de dualité du paragraphe 3.4 en retrouvant l'égalité suivante, qui relie le genre des classes et la norme simpliciale $\| \cdot \|_H$ de $H_2(\Gamma, \mathbf{R})$:

PROPOSITION 3.5. ([B-G] prop. 1-9). *Pour toute classe $\alpha \in H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$, on a la relation*

$$\| \alpha \|_H = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n\alpha)}{n} .$$

Preuve. Si Γ est égal à L/R , où L est libre, on a une extension centrale

$$(12) \quad 0 \rightarrow R \cap [L, L]/[L, R] \rightarrow [L, L]/[L, R] \rightarrow L/R = \Gamma \rightarrow 1$$

dont le noyau est isomorphe à $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ (c'est la formule de Hopf). Noter que pour un groupe parfait, l'extension ci-dessus est l'extension centrale universelle de Γ ([Mil 2] § 5). L'isomorphisme $R \cap [L, L]/[L, R] \approx H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ peut s'expliquer comme suit (voir [Brw] p. 46). Considérons la 2-chaîne du groupe libre L définie par

$$\begin{aligned} & z(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \\ &= \sum_{i=1}^g \{ (C_{i-1}, A_i) + (C_{i-1}A_i, B_i) - (C_{i-1}A_iB_iA_i^{-1}, B_i) - (C_i, B_i) \} \end{aligned}$$

où $g \in \mathbf{N}^*$, $A_i, B_i \in L$ et $C_i = [A_1, B_1] \dots [A_i, B_i] \quad i = 1, \dots, g$ (fig. 13).

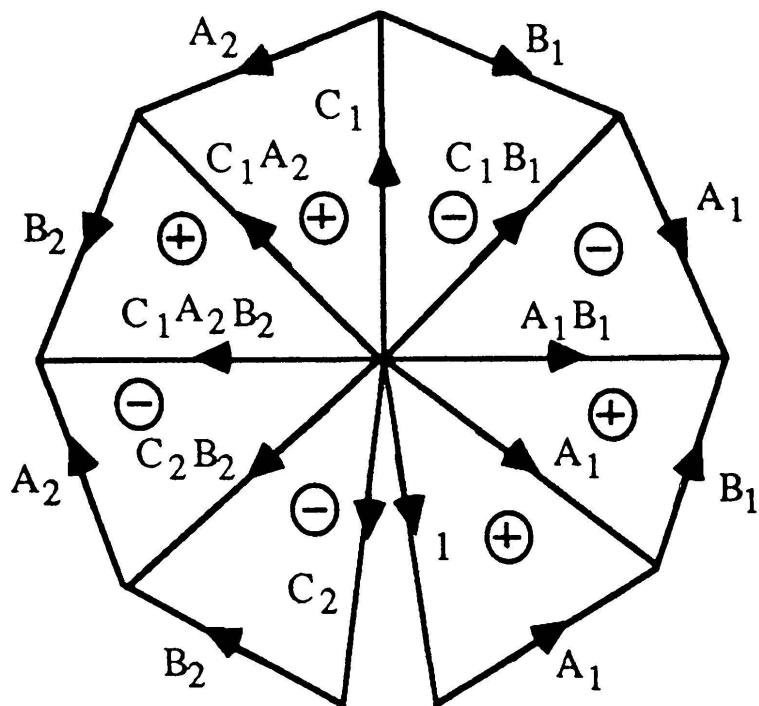
 $(g = 2)$

FIGURE 13

Le bord de $z(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g)$ est égal à $1 - [A_1, B_1] \dots [A_g, B_g]$. On obtient l'isomorphisme de Hopf en associant à tout élément $[A_1, B_1] \dots [A_g, B_g]$ de $[L, L] \cap R$ le 2-cycle $z(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$ sur Γ , a_i et b_i étant les projections de A_i et B_i dans Γ .

Ainsi le second groupe d'homologie $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ apparaît comme sous-groupe du groupe dérivé E' de $E = L/[L, R]$, et le genre d'une 2-classe α (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(n\alpha)/n)$) est exactement sa longueur des commutateurs (resp. sa longueur stable) dans E , quand on la considère comme élément de E' .

La (semi-)norme simpliciale de $H_2(\Gamma, \mathbf{R})$ s'exprime par dualité grâce au théorème de Hahn-Banach:

$$\|\alpha\|_H = \sup_c \frac{|c(\alpha)|}{\|c\|} \quad (\alpha \in H_2(\Gamma, \mathbf{Z}))$$

où c décrit $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. D'après 3.4, il en est de même pour la longueur stable de α , vue comme élément de E' :

$$4 \|\alpha\| = \sup_\Phi \frac{|\varphi(\alpha)|}{\|\Phi\|}$$

où Φ décrit $\text{Ker}(H_b^2(E, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(E, \mathbf{R})) (= H_b^2(E, \mathbf{R}))$, $\|\Phi\|$ désigne la norme naturelle de Φ dans $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$, et $d\varphi$ son représentant canonique (prop. 3.3.1). Pour établir la proposition, il suffira d'identifier les éléments respectifs de ces deux formules de dualité. On a vu en 3.3 que Φ et c se correspondaient par isométrie. De plus si l'élément $\gamma = [A_1, B_1] \dots [A_g, B_g]$ de E' correspond à la

classe $\alpha = z(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$ (a_i, b_i sont les projections de A_i, B_i dans Γ et $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$), alors d'après 3.3 (rel. (11)):

$$c(\alpha) = d\varphi(z(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g)) = \varphi(\partial\{z(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g)\}) = -\varphi(\gamma).$$

On en conclut que $4 \|[A_1, B_1] \dots [A_g, B_g]\| = \|\alpha\|_H$, ce qu'il fallait démontrer.

3.6. LE THÉORÈME DE DUALITÉ

Rappelons que chaque classe c du noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ possède un représentant privilégié $d\varphi$ où φ est un quasi-morphisme homogène; on peut se demander s'il existe un rapport entre $\|d\varphi\|$ et la norme $\|c\|_b$ de c dans $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. Pour cela considérons l'espace K des quasi-morphismes homogènes définis à l'addition d'un morphisme près. L'identification de K avec $\text{Ker}(H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R}))$ provient de la décomposition en somme directe (lire quasi-morphismes pour $q - m$):

$$\{q - m\} = \{q - m \text{ homogènes}\} \oplus \{q - m \text{ bornés}\}.$$

On voit ainsi que $\|d\varphi\|$ est une norme *induite*, tandis que $\|c\|_b$ est une norme *quotient*. Comme le montrent la définition de $\|c\|_b$ et la relation (10), ces deux normes sont comparables:

$$\|c\|_b \leq \|d\varphi\| \leq 4 \|c\|_b.$$

Mais en estimant la longueur des commutateurs de l'élément $x^n y^n (xy)^{-n}$ qui intervient dans la formule asymptotique (lemme 3.6), on trouve une inégalité plus fine:

$$\|d\varphi\| \leq 2 \|c\|_b.$$

On verra des exemples où $\|d\varphi\| = 2 \|c\|_b$ (3.8).

Cependant il y a une autre norme sur K , définie par

$$\|\varphi\|_\Gamma = \sup\{|\varphi[x, y]|; x, y \in \Gamma\} \quad (\varphi \in K).$$

L'intérêt de cette norme naturelle réside dans le fait qu'elle est reliée à la longueur stable par dualité:

THÉORÈME DE DUALITÉ. *Pour tout élément γ de Γ' on a la relation*

$$\|\gamma\| = \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in K} \frac{|\varphi(\gamma)|}{\|\varphi\|_\Gamma}.$$

Nous commençons par établir le résultat suivant qui est le point clé de la démonstration:

LEMME 3.6. Dans le groupe libre $L(u, v)$ on a

$$c(u^n v^n (uv)^{-n}) = E^* \binom{n-1}{2} \quad (n \geq 1)$$

où E^* est la partie entière supérieure.

Preuve. L'élément $u^{n+1} v^{n+1} (uv)^{-n-1}$ se réduit cycliquement à $u^n v^n (vu)^{-n}$. Tout symbole associé à ce dernier élément aura au plus 1 classe à 2 sommets et 2 classes à 3 sommets, les autres classes comprenant au moins 4 sommets. Cela conduit à l'estimation:

$$c(u^n v^n (vu)^{-n}) \geq n/2 .$$

Pour établir une inégalité dans l'autre sens, il suffit d'examiner le cas où n est pair puisque

$$u^{2k+1} v^{2k+1} (vu)^{-2k-1} = u(u^{2k} v^{2k} (vu)^{-2k}) [v^{-1}, (vu)^{2k+1}] .$$

Posons $n = 2k$ et considérons le symbole σ_k :

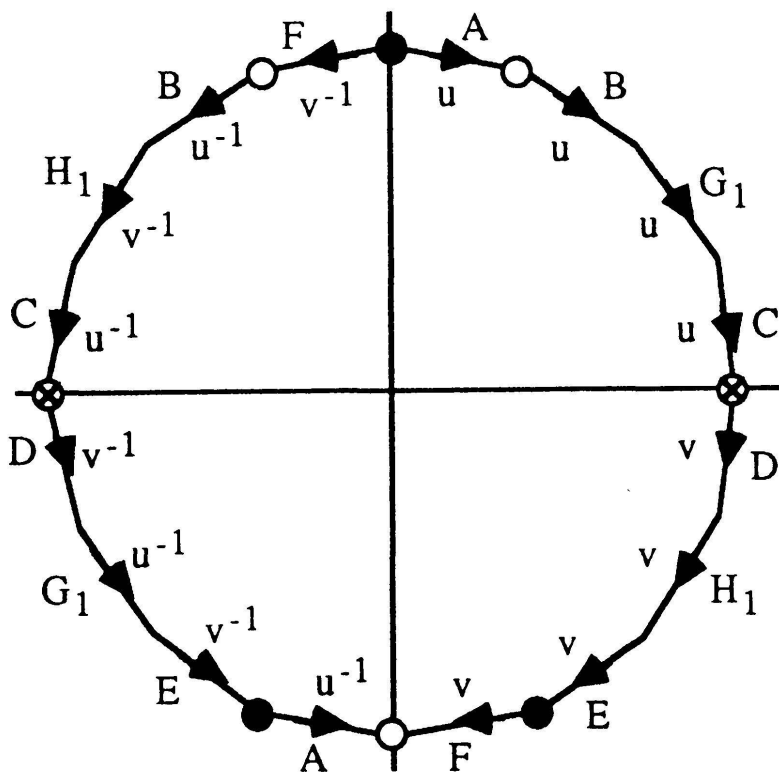
$ABG_1 G_2 \dots G_{2k-3} CDH_1 H_2 \dots H_{2k-3} EF /$ (milieu du mot)

$u \ u \ u \ u \ \dots \ u \ u \ v \ v \ v \ \dots \ v \ v \ v$

$A^{-1} E^{-1} G_{2k-3}^{-1} H_{2k-4}^{-1} \dots H_2^{-1} G_1^{-1} D^{-1} C^{-1} H_{2k-3}^{-1} G_{2k-4}^{-1} \dots G_2^{-1} H_1^{-1} B^{-1} F^{-1}$

$u^{-1} v^{-1} u^{-1} v^{-1} \quad \dots \ v^{-1} u^{-1} v^{-1} \quad u^{-1} v^{-1} u^{-1} \quad \dots \ u^{-1} v^{-1} u^{-1} v^{-1}$

(le bloc $\boxed{\quad}$ est formé de k fois $u^{-1} v^{-1}$). Ou encore, géométriquement:



($k = 2$)

FIGURE 14

On identifie deux à deux toutes les arêtes possibles (i.e. de façon compatible avec le mot $u^n v^n (vu)^n$) par la symétrie centrale; les autres arêtes sont identifiées par la symétrie d'axe vertical (fig. 14). Ce symbole σ_k comprend une classe \otimes de 2 sommets ($CD, D^{-1}C^{-1}$), 2 classes \circ et \bullet de 3 sommets ($AB, B^{-1}F^{-1}, FA^{-1}$ et $F^{-1}A, A^{-1}E^{-1}, EF$) et $2k-2$ classes de 4 sommets. Son genre est donc égal à k .

Le lemme permet de comparer la norme $\|\varphi\|_\Gamma$ avec

$$\|d\varphi\|_\Gamma = \sup\{|d\varphi(x, y)|; x, y \in \Gamma\},$$

et même avec la norme de $d\varphi$ restreint au groupe dérivé:

PROPOSITION (égalité des normes). *Pour tout $\varphi \in K$:*

$$\|d\varphi\|_\Gamma = \|\varphi\|_\Gamma = \|d\varphi\|_{\Gamma'}.$$

Preuve. Sachant que φ est homogène et constant sur les classes de conjugaison, on a

$$\varphi([x, y]) = -d\varphi(xy x^{-1}, y^{-1}) \quad (x, y \in \Gamma),$$

d'où $\|\varphi\|_\Gamma \leq \|d\varphi\|_\Gamma$. D'après le lemme 3.6, l'élément $x^{2k+1}y^{2k+1}(xy)^{-2k-1}$ est le produit de k commutateurs; il suit que

$$\varphi(x^{2k+1}y^{2k+1}(xy)^{-2k-1}) \leq k\|\varphi\|_\Gamma + (k-1)\|d\varphi\|_{\Gamma'}.$$

La formule asymptotique montre alors que

$$|d\varphi(x, y)| \leq \frac{1}{2} (\|\varphi\|_\Gamma + \|d\varphi\|_{\Gamma'}).$$

Comme $\|\varphi\|_\Gamma$ et $\|d\varphi\|_{\Gamma'}$ sont majorés par $\|d\varphi\|_\Gamma$, on en déduit l'égalité cherchée.

Preuve du théorème. Dans la formule asymptotique on peut remplacer φ par f car $\varphi - f$ est borné:

$$d\varphi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f(x^n y^n (xy)^{-n})).$$

Si f est antisymétrique, la quantité $f(x^n y^n (xy)^{-n})$ se majore comme en 1.1 par $\|df\|(4c(x^n y^n (xy)^{-n}) - 1)$, et on voit d'après le lemme 3.6 que

$$\|d\varphi\|_\Gamma \leq 2\|df\|.$$

Rappelons maintenant que la longueur stable s'exprime par dualité (Prop. 3.4):

$$4 \|\gamma\| = \sup_f \frac{|\varphi(\gamma)|}{\|df\|} \quad (\gamma \in \Gamma').$$

Grâce à la remarque 2) de 1.1, cette égalité est encore valable quand f décrit seulement l'espace des quasi-morphismes antisymétriques. Mais on a vu que $\|\varphi\|_\Gamma \leq \|d\varphi\|_\Gamma \leq 2 \|df\|$, d'où

$$\|\gamma\| \leq \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in K} \frac{|\varphi(\gamma)|}{\|\varphi\|_\Gamma}.$$

D'autre part, on a clairement:

$$|\varphi(\gamma)| = \frac{1}{n} |\varphi(\gamma^n)| \leq \frac{1}{n} \{c(\gamma^n) \|\varphi\|_\Gamma + (c(\gamma^n) - 1) \|d\varphi\|_\Gamma\},$$

dont on déduit l'inégalité

$$|\varphi(\gamma)| \leq 2 \|\gamma\| \|\varphi\|_\Gamma \quad (\varphi \in K, \gamma \in \Gamma')$$

qui permet d'achever la preuve du théorème de dualité.

Remarques.

1) Soit Q_Γ le quotient de $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ par l'adhérence du sous-espace engendré par $\{\gamma^n - n\gamma; \gamma \in \Gamma', n \in \mathbf{Z}\}$. Comme K_Γ est naturellement le dual de Q_Γ , on peut reformuler le théorème de dualité: $\|\gamma\|_Q = 2 \|\gamma\|$.

2) La proposition «égalité des normes» montre que $\|\varphi\|_\Gamma$ ne dépend que des valeurs de φ sur le n -ième groupe dérivé $\Gamma^{(n)}$ de Γ , n aussi grand que l'on veut; en d'autres termes, l'espace Q_Γ est engendré par les images des commutateurs d'éléments de $\Gamma^{(n)}$, n aussi grand que l'on veut. On retrouve en particulier le fait que la longueur stable des groupes résolubles est nulle.

3) D'après cette même proposition, la restriction définit une injection isométrique $(K_\Gamma, \|\varphi\|_\Gamma) \rightarrow (K_{\Gamma'}, \|\varphi\|_{\Gamma'})$. C'est l'analogie d'une propriété générale de la cohomologie bornée: si le quotient de Γ par un sous-groupe normal Γ_1 est moyennable, alors $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H_b^2(\Gamma_1, \mathbf{R})$ est une injection isométrique ([Gr 2]).

3.7. PROPRIÉTÉS DE LA LONGUEUR STABLE

On a regroupé dans ce paragraphe quelques propriétés générales de la longueur stable. La première découle du lemme 3.6:

PROPOSITION 3.7.1. *Pour tout groupe Γ on a l'inégalité:*

$$\|\gamma_1\gamma_2\| \leq \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\| + \frac{1}{2} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma').$$

Preuve. Elle est immédiate à partir du lemme 3.6.

Cette inégalité est optimale; pour le voir il suffit de prendre $\Gamma = L(u, v, w, t)$, $\gamma_1 = [u, v]$, $\gamma_2 = [w, t]$ et d'appliquer le théorème 1 de la partie 1. Plus généralement, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 3.7.2. *Soit Γ_1 et Γ_2 deux groupes et $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ leur somme libre. Alors pour tout $\gamma_1 \neq 1$ dans Γ_1 et tout $\gamma_2 \neq 1$ dans Γ_2 on a l'égalité*

$$\|\gamma_1\gamma_2\|_{\Gamma} = \|\gamma_1\|_{\Gamma_1} + \|\gamma_2\|_{\Gamma_2} + \frac{1}{2}.$$

Commentaire. Les éléments $(\gamma_1\gamma_2)^n$ et $\gamma_1^n\gamma_2^n$ diffèrent par $n/2$ commutateurs environ (lemme 3.6); la proposition signifie que ces commutateurs sont nécessaires à cause de l'indépendance des deux facteurs Γ_1 et Γ_2 .

Preuve. D'après l'inégalité évidente $\|\gamma_i\|_{\Gamma} \leq \|\gamma_i\|_{\Gamma_i}$ (qui est d'ailleurs une égalité) et la proposition 3.7.1, on a la relation

$$\|\gamma_1\gamma_2\|_{\Gamma} \leq \|\gamma_1\|_{\Gamma_1} + \|\gamma_2\|_{\Gamma_2} + \frac{1}{2}.$$

Il reste à établir l'inégalité inverse. Pour cela, on s'appuiera sur l'interprétation de l'espace K_{Γ} comme dual de Q_{Γ} (voir 3.6, remarque 1) et sur le théorème de dualité. Rappelons que Q_{Γ} est le quotient de $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ par l'adhérence du sous-espace engendré par $\{\gamma^n - n\gamma; \gamma \in \Gamma', n \in \mathbf{Z}\}$. On observe que Q_{Γ_1} et Q_{Γ_2} s'injectent dans Q_{Γ} et sont en somme directe dans cet espace. On aura besoin d'un résultat préliminaire:

Affirmation. L'image de $\partial(\gamma_1, \gamma_2)$ n'appartient pas à la somme directe $Q_{\Gamma_1} \oplus Q_{\Gamma_2}$ dans Q_{Γ} .

Pour prouver ce fait, il suffit de construire une forme linéaire sur Q_{Γ} , i.e. un quasi-morphisme homogène sur Γ , qui s'annule sur $Q_{\Gamma_1} \oplus Q_{\Gamma_2}$ et de valeur non nulle sur $\partial(\gamma_1, \gamma_2)$. Tout élément x de Γ s'écrit de manière unique

$$x = x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_n y_n$$

où x_i et y_i sont des éléments distincts de 1, sauf peut-être x_1 ou y_n , appar-

tenant respectivement à Γ_1 et Γ_2 . On pose alors, en s'inspirant de la définition des quasi-morphismes de Brooks (voir 1.1):

$$f(x) = \mathcal{O}(x) - \mathcal{O}(x^{-1}),$$

où $\mathcal{O}(x)$ est le nombre d'occurrences de $\gamma_1\gamma_2$ dans l'écriture canonique de x . Par la même vérification formelle qu'en 1.1, f est un quasi-morphisme. Le quasi-morphisme homogène associé $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x^n)/n)$ fait l'affaire car il s'annule sur Γ_1 et Γ_2 et $\varphi(\partial(\gamma_1, \gamma_2)) = d\varphi(\gamma_1, \gamma_2) = -1$.

Revenons à la démonstration de la proposition. Soit ε un réel > 0 . D'après le théorème de dualité, il existe un quasi-morphisme homogène φ_i sur Γ_i de norme 1 tel que

$$\varphi_i(\gamma_i) \geq 2 \|\gamma_i\|_{\Gamma_i} - \varepsilon \quad (i = 1, 2).$$

Notons D la droite de Q_Γ engendrée par l'image de $\partial(\gamma_1, \gamma_2)$. On définit une forme linéaire de norme 1 sur $Q_{\Gamma_1} \oplus Q_{\Gamma_2} \oplus D$ en posant

$$\varphi(q_i) = \varphi_i(q_i) \text{ si } q_i \in Q_{\Gamma_i} (i = 1, 2) \quad \text{et} \quad \varphi(\partial(\gamma_1, \gamma_2)) = -1.$$

Grâce au théorème de Hahn-Banach, φ se prolonge en un élément $\tilde{\varphi}$ de K_Γ de norme 1. Par suite

$$\|\gamma_1\gamma_2\|_\Gamma \geq \frac{1}{2} |\tilde{\varphi}(\gamma_1\gamma_2)| = \frac{1}{2} |\varphi_1(\gamma_1) + \varphi_2(\gamma_2) + 1| \geq \|\gamma_1\|_{\Gamma_1} + \|\gamma_2\|_{\Gamma_2} + \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

On termine en faisant tendre ε vers 0.

Exemple. Dans le groupe libre $L(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k)$ on a:

$$\left\| \prod_{i=1}^k [u_i, v_i]^{p_i} \right\| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |p_i| + \frac{k-1}{2} \quad (p_i \in \mathbf{Z}).$$

Ce résultat pourrait aussi s'établir en utilisant la méthode des symboles de la partie 2.

Voici une autre propriété de la longueur stable:

PROPOSITION 3.7.3 (d'annulation). *Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec pour tout $(x, y) \in \Gamma^2$*

$$\|[x, y]\| \leq \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Alors la longueur stable de Γ est nulle.

Preuve. Soit $\varphi \in K$ et $(x_n), (y_n)$ deux suites d'éléments de Γ telles que

$$\|\varphi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi([x_n, y_n])|.$$

Si φ est non nul, l'inégalité $|\varphi(\gamma)| \leq 2 \|\gamma\| \|\varphi\|_\Gamma$ impose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[x_n, y_n]\| = \frac{1}{2},$$

ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi $\|\varphi\|_\Gamma = 0$, et par dualité la longueur stable de Γ est nulle.

3.8. EXEMPLES DE CALCUL DE LONGUEUR STABLE

Comme les morphismes de groupes $\phi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ diminuent la longueur des commutateurs et la longueur stable:

$$c_{\Gamma_2}(\phi(\gamma)) \leq c_{\Gamma_1}(\gamma) \quad \text{et} \quad \|\phi(\gamma)\|_{\Gamma_2} \leq \|\gamma\|_{\Gamma_1} \quad (\gamma \in \Gamma_1),$$

il est important de disposer de groupes où la longueur des commutateurs est connue. C'est le cas du groupe \tilde{H} des homéomorphismes h de \mathbf{R} vérifiant $h(x+1) = h(x) + 1$ ($x \in \mathbf{R}$), pour lequel les produits de commutateurs ont été bien étudiés dans [Wo] et [E-H-N]. Par exemple ([Wo], [E-H-N]) la translation d'amplitude t est produit de p commutateurs si et seulement si:

$$|t| < 2p - 1.$$

Plus généralement, un produit h de p commutateurs de \tilde{H} est caractérisé dans [E-H-N] par la propriété suivante:

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} (h(x) - x) < 2p - 1 \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} (h(x) - x) > 1 - 2p.$$

Le groupe \tilde{H} possède un quasi-morphisme célèbre, le *nombre de translation* τ , défini indépendamment du réel x par:

$$\tau(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h^n(x) - x}{n} \quad (h \in \tilde{H}).$$

Le nombre de translation est homogène, et il détermine la longueur stable du groupe \tilde{H} :

PROPOSITION 3.8. Pour tout élément h de \tilde{H} : $\|h\|_{\tilde{H}} = \frac{1}{2} |\tau(h)|$.

Preuve. Le nombre de translation est l'unique quasi-morphisme homogène de \tilde{H} (à morphisme et homothétie près), puisque $H_b^2(\tilde{H}, \mathbf{R})$ est égal à $\mathbf{R}(d\tau)$ ([M-M]). On applique alors le théorème de dualité.

Une autre preuve plus directe consisterait à utiliser le critère de [E-H-N] cité plus haut.

Revenons au cas du groupe libre $L = L(u, v)$ et calculons la longueur stable de $[u, [u, v]]$. Pour cela considérons la combinaison de quasi-morphismes de Brooks de $L(u, v)$ définie par

$$f = f_{uvu^{-1}} + f_{u^{-1}v^{-1}u^{-1}} + f_{u^{-1}vu} + f_{uv^{-1}u}.$$

On vérifie comme en 1.1 que $\|df\| = 2$. L'élément $[u, [u, v]]^n$ est conjugué à $(uvu^{-1}v^{-1}u^{-1}vuv^{-1})^n$ et $f((uvu^{-1}v^{-1}u^{-1}vuv^{-1})^n) = 4n - 1$; d'où (lemme 1.1) $c([u, [u, v]]^n) \geq E(n/2) + 1$. Finalement, on conclut que

$$\| [u, [u, v]] \|_L = 1/2.$$

Voici un exemple de calcul de longueur stable par dualité. Soit $f = f_{uv}$ le quasi-morphisme de Brooks associé à uv dans $L = L(u, v)$. Alors $\|df\| \leq 1$, donc $\|d\varphi\| = \|\varphi\|_L \leq 2$. Mais $\varphi([vu^2, u^{-1}v]) = 2$, et comme

$$|\varphi([vu^2, u^{-1}v])| \leq 2 \|\varphi\|_L \| [vu^2, u^{-1}v] \|_L,$$

on voit que $\| [vu^2, u^{-1}v] \|_L = \frac{1}{2}$.

De plus la norme de la classe c de $d\varphi$ dans $H_b^2(L, \mathbf{R})$ est égale à 1. Pour cet exemple, on a donc $\|d\varphi\| = 2 \|c\|_b$.

On a constaté que la longueur stable peut prendre des valeurs arbitraires (dans \tilde{H} par exemple). Il est également facile de construire un groupe dénombrable Γ avec un élément γ de longueur stable rationnelle donnée:

$$\Gamma = \langle u, v, w, t \mid [u, v]^p = [w, t] \rangle, \quad \| [u, v] \|_\Gamma = \frac{1}{2p} \quad (p \in \mathbf{N}^*).$$

(pour la minoration prendre un morphisme de Γ dans \tilde{H}). Cependant, pour les groupes libres, elle est minorée par 1/6 (2.6); les résultats précédents suggèrent la question suivante, laissée au lecteur comme conclusion:

Question: la longueur stable d'un groupe libre est-elle à valeurs demi-entières?