**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 37 (1991)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LONGUEUR STABLE DES COMMUTATEURS
**Autor:** Bavard, Christophe
**Kapitel:** 2. Longueur des commutateurs dans les groupes libres
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-58734

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Passons au cas où $n$ est impair ($n = 2k + 1$). La relation (R) s'écrit aussi

$$[C, u]\,[u^n, v] = CD(1, n-3)(1, n-4)\dots(1,1)(1,0)$$

avec $$C = (1, n-2)(2, n-3)(3, n-4)\dots(n-1, 0)$$

et $$D = (-n+1, 1)\dots(-4, n-4)(-3, n-3)(-1, n-2)\,.$$

Compte tenu de l'identité

$$[y, x]\,[x, z] = [yz^{-1}, zxz^{-1}]$$

on voit que l'élément

$$\Delta' = (-2k, 1)\dots(-4, 2k-3)(-1, 2k-2)(3, 2k-3)$$
$$\dots\underbrace{(2k, 0)(1, 2k-2)}\,\underbrace{(1, 2k-3)\dots(1, 0)}$$

est le produit de 2 commutateurs. La transposition des blocs $\llcorner\!\!\!\!____\lrcorner$ et $\llcorner___\lrcorner$ diminue la valeur maximale de $q$ de 2 unités, au prix d'un commutateur; au bout de $k-1$ opérations analogues il vient

$$\Delta' = (2k, 0)\prod_{i=1}^{k-1}[A_i, B_i](1, 0) \qquad (A_i, B_i \in L, i = 1\dots k-1)\,.$$

On termine en conjuguant par $(1, 0)$.

*Exemple* ($n = 3$).

$$[u, v]^3 = \left[{}^u[v, u]u^{-1}, {}^{u^2}[u, v]\,{}^u([u, v]^2)\right]\,[u^3, v]\,.$$

## 2. Longueur des commutateurs dans les groupes libres

Cette partie est consacrée à l'étude des produits de commutateurs et de carrés dans les groupes libres. On y retrouve les résultats de [G-T] et [Cu] en utilisant directement l'algorithme de classification des surfaces.

2.1. Il convient avant tout de faire une petite remarque. Soit $U$ un ensemble et $L(U)$ le groupe libre de base $U$. Si $U$ est inclus dans $V$, on a pour tout élément $\gamma$ de $L'(U)$:

$$c_{L(U)}(\gamma) = c_{L(V)}(\gamma)\,.$$

En effet toute relation dans $L(V)$ se projette dans $L(U)$ grâce à la rétraction évidente $L(V) \to L(U)$.

Donc, pour calculer $c(\gamma)$, *on peut se restreindre au sous-groupe engendré par ceux des générateurs qui interviennent dans l'écriture réduite de* $\gamma$.

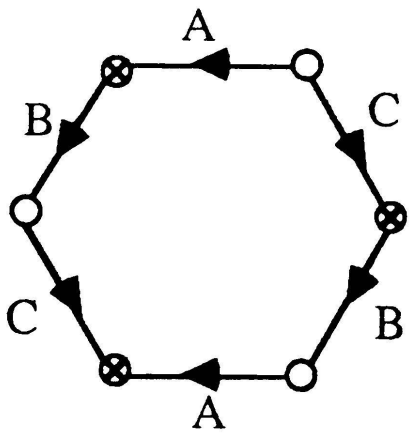
2.2. Afin de fixer le vocabulaire pour la suite, on rappelle quelques faits élémentaires concernant les surfaces fermées.

Considérons tout d'abord un polygone à $2n$ côtés, ou arêtes ($n \in \mathbf{N}^*$); la donnée d'un recollement par paires des arêtes, avec des orientations spécifiées, définit une surface fermée. Les identifications d'arêtes peuvent être codées par un mot, appelé *symbole,* de la forme

$$A_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots A_{i_{2n}}^{\varepsilon_{2n}} \qquad i_1, \dots, i_{2n} \in \{1, \dots, n\}, \ \varepsilon_i = 1 \text{ ou } -1 , \tag{3}$$

où chacune des $n$ lettres $A_1 \dots A_n$ apparaît exactement deux fois, avec exposant 1 ou $-1$; on écrit alors ce mot cycliquement, dans le sens direct, autour du polygone et on identifie les arêtes qui portent la même lettre, l'orientation étant dictée par les exposants $\varepsilon_i$.

*Exemple.*




*Symbole:* $ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$

FIGURE 1

*Il sera important de penser qu'un symbole définit un élément du groupe libre* $L(A_1, \dots, A_n)$. Les surfaces considérées ici seront *orientables* (sauf en 2.8) de sorte que chaque lettre $A_i$ dans (3) apparaît une fois avec exposant $+1$ et une fois avec exposant $-1$. En particulier le symbole (3) appartient au groupe dérivé de $L(A_1, \dots, A_n)$.

On appellera *genre* d'un symbole celui de la surface qu'il définit. L'identification des arêtes induit une partition des sommets du polygone en *classes*; si $p$ désigne le nombre de ces classes, le genre $g$ est donné par

$$g = \frac{1}{2}(n + 1 - p) . \tag{4}$$

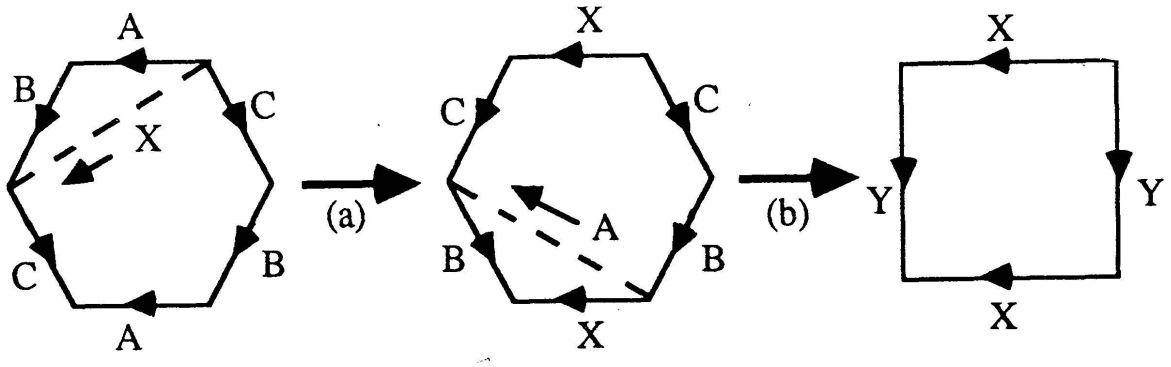
Ainsi dans l'exemple ci-dessus (voir fig. 1), on dénombre deux classes de sommets, figurées par ○ et ⊗, et le genre est égal à 1.

Deux symboles sont équivalents s'ils définissent la même surface. On montre, dans la preuve du théorème de classification des surfaces, que tout symbole (orientable) de genre $g \geqslant 1$ est équivalent au symbole canonique

$$X_1 Y_1 X_1^{-1} Y_1^{-1} \dots X_g Y_g X_g^{-1} Y_g^{-1}$$

par découpages et recollements sur le polygone (voir [Ma 1]).

*Exemple.* $ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$ (*genre* 1)




(a): On coupe suivant $X$ et on recolle suivant $A$.

(b): On observe que $C$ et $B$ forment une seule arête $Y$.

FIGURE 2

## 2.3. SYMBOLES ASSOCIÉS ET LONGUEUR DES COMMUTATEURS

Fixons un produit de commutateurs $\gamma$ d'un groupe libre $L = L(u_1, u_2, \dots)$. Puisque la longueur des commutateurs est invariante par conjugaison, on peut supposer que $\gamma$ admet une écriture cycliquement réduite, disons de longueur usuelle $2n$. Un symbole $\sigma = A_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots A_{i_{2n}}^{\varepsilon_{2n}}$ de longueur $2n$ est dit *associé* à $\gamma$ si une substitution convenable de certains des générateurs de $L$ (ou de leurs inverses) aux $A_i$ définit un morphisme de $L(A_1, A_2, \dots)$ dans $L$ qui envoie $\sigma$ sur $\gamma$. Voici par exemple deux symboles associés à $[u, v]^3$:

$ABA^{-1}B^{-1}CDC^{-1}D^{-1}EFE^{-1}F^{-1}$ par $A, B, C, D, E, F \to u, v, u, v, u, v$
$ABA^{-1}CDEFB^{-1}F^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1}$ par $A, B, C, D, E, F \to u, v, v^{-1}, u, v, u^{-1}$.

Le nombre de symboles associés à un élément donné est évidemment *fini*. Les algorithmes de [G-T] et [Cu] peuvent alors se formuler ainsi:

THÉORÈME 2. *La longueur des commutateurs* $c(\gamma)$ *dans un groupe libre est égale au genre minimal des symboles associés à* $\gamma$.

*Exemples.*

1) La longueur des commutateurs d'un symbole est égale à son genre: par exemple $c([u_1, v_1] \dots [u_k, v_k]) = k$ dans $L(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k)$ ([L-S] p. 55).

2) Eléments de petite longueur.

Quand la longueur usuelle (notée $2n$) de $\gamma$ est petite, il est facile d'estimer le nombre de classes de sommets et leurs cardinaux. On en déduit les résultats suivants:

Si $2n = 6$, $\gamma$ est toujours un commutateur puisqu'un symbole de longueur 6 est de genre 1; par exemple $uvwu^{-1}v^{-1}w^{-1} = [uv, wv]$ et $[u, v][v, w] = [uw^{-1}, wvw^{-1}]$.

Si $2n = 8$, alors $c(\gamma) = 1$ ou 2, et $c(\gamma) = 1$ si et seulement si $\gamma$ contient un sous-mot $xy$ de longueur 2 et son inverse $y^{-1}x^{-1}$.

Si $2n = 10$, alors $c(\gamma) = 1$ ou 2, et $c(\gamma) = 1$ si et seulement si $\gamma$ contient deux sous-mots de longueur 2 (ayant peut-être une lettre commune) et leurs inverses.

## 2.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Soit $m$ le genre minimal des symboles associés à $\gamma$.

*Démonstration de* $c(\gamma) \leqslant m$.

Pour tout symbole $\sigma$ associé à $\gamma$, il existe par définition un morphisme qui envoie $\sigma$ sur $\gamma$. Il suffit donc de montrer qu'un symbole (orientable) $\sigma \in L(A_1, \dots, A_n)$ de genre $g$ est le produit de $g$ commutateurs de $L(A_1, \dots, A_n)$. On observe pour cela que les opérations géométriques effectuées sur les polygones pour réduire le symbole se traduisent algébriquement. Ces opérations sont de deux types (voir [Ma 1]): éliminer une paire d'arêtes adjacentes $AA^{-1}$, et couper puis recoller. La première revient à simplifier le symbole comme mot en les $A_i$; couper revient à remplacer une portion du symbole par une nouvelle lettre, et recoller suivant l'arête étiquetée $A_i$ revient à éliminer $A_i$. Le nouveau symbole défini par chacune de ces transformations s'envoie donc sur l'ancien par un morphisme de groupes. Et en mémorisant ces changements de variables au cours de la réduction du symbole, on peut exprimer le symbole canonique $[X_1, Y_1] \dots [X_g, Y_g]$ au moyen des lettres $A_i$ du symbole intial $\sigma$, ce qui explicite $\sigma$ comme produit de $g$ commutateurs.

*Exemple* (voir 2.2 fig. 2). $\sigma = ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$

(a): on pose $X = AB$ et on élimine $A$ par $A^{-1} = BX^{-1}$

(b): on pose $Y = CB$.

D'où $ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1} = XCBX^{-1}B^{-1}C^{-1} = XYX^{-1}Y^{-1} = [AB, CB]$.

*Démonstration de* $m \leqslant c(\gamma)$.

Supposons $\gamma$ écrit comme produit de $k$ commutateurs:

$$\gamma = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] \qquad (a_i, b_i \in L(u_1, u_2, \ldots)) \,. \tag{5}$$

Il s'agit de construire un symbole associé à $\gamma$ de genre au plus $k$. Pour cela, on va définir une opération sur les symboles. Etant donné un symbole $\sigma$, on sélectionne deux lettres consécutives de $\sigma$, que l'on appelle $W$ et $X$, puis on remplace $W$ et $X$ par deux *nouvelles* lettres $Y$ et $Z$ selon la règle suivante: changer respectivement $W$ en $Y$, $X$ en $Y^{-1}$, $W^{-1}$ en $Z$ et $X^{-1}$ en $Z^{-1}$ (voir fig. 3). Soit $\mathscr{E}(\sigma)$ le nouveau symbole obtenu. Noter que $\mathscr{E}(\sigma)$ n'est pas défini comme image de $\sigma$ par un morphisme. Cependant:

*Affirmation.* La transformation $\mathscr{E}$ n'augmente pas le genre.

Il revient au même de voir que $\mathscr{E}$ ne diminue pas le nombre de classes de sommets. Vérifions-le avec la description géométrique de $\mathscr{E}$ sur les polygones correspondants:

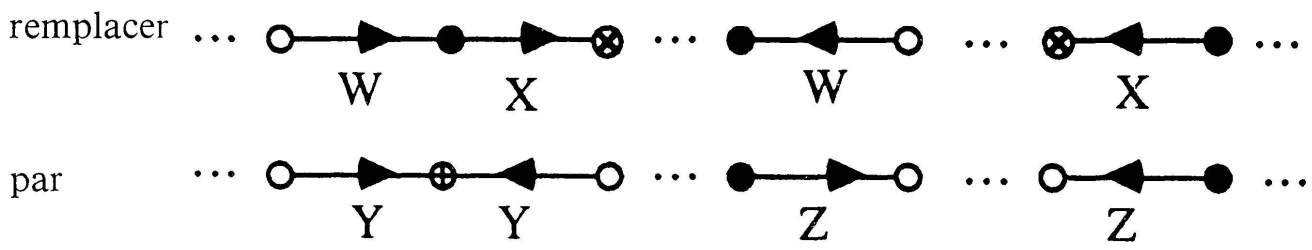



FIGURE 3

Il y a au plus trois classes de sommets de $\sigma$ impliquées dans cette opération; ces classes se transforment en au moins deux classes car $\mathscr{E}(\sigma)$ comprend une nouvelle classe, notée $\oplus$, formée d'un seul sommet entre les deux arêtes $Y$ (fig. 3). On peut donc supposer que les trois classes initiales $\bigcirc$, $\bullet$ et $\otimes$ sont distinctes. Alors dans $\mathscr{E}(\sigma)$ les classes $\bigcirc$ et $\bullet$ restent distinctes, puisqu'elles ne peuvent s'identifier que par des arêtes ne figurant pas sur le dessin, ce qui est exclu par hypothèse (les classes $\bigcirc$ et $\otimes$, quant à elles, sont identifiées). L'affirmation est ainsi démontrée.

Considérons maintenant la décomposition (5) de $\gamma$ en produit de $k$ commutateurs, et remplaçons dans l'écriture réduite de chaque $a_i$ (resp. $b_i$) toutes les $u_j$ et les $u_j^{-1}$ par des lettres deux à deux distinctes:

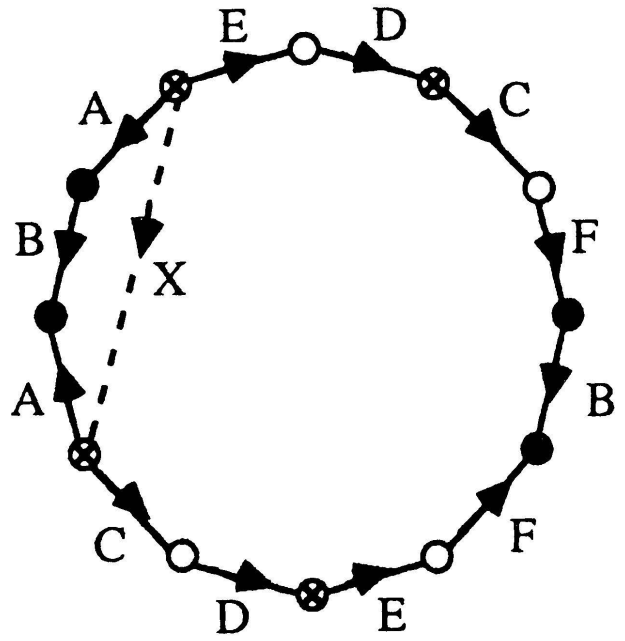
$$a_1 \to AB \dots EF, \quad b_1 \to GH \dots KL, \quad a_2 \to MN \dots QR, \quad \text{etc.}$$

En développant les commutateurs, on obtient le symbole suivant:

$$\begin{aligned}\sigma &= [AB \dots EF, GH \dots KL]\,[MN \dots QR, \dots] \dots \\ &= AB \dots EFGH \dots KLF^{-1}E^{-1} \dots B^{-1}A^{-1}L^{-1}K^{-1} \dots H^{-1}G^{-1}MN \dots QR \dots\end{aligned}$$

qui est de genre $k$ (penser chaque segment $AB \dots EF$ provenant d'un $a_i$ ou d'un $b_i$ comme une arête $A_i$ ou $B_i$). Evidemment, la longueur usuelle de $\sigma$ est *a priori* bien plus grande que celle de $\gamma$; en effet, à chaque lettre de $\sigma$ correspond un générateur $u_j$ ou son inverse dans la formule (5) développée, mais celle-ci n'est pas en général une écriture réduite de $\gamma$. Appliquons alors $\mathscr{E}$ en choisissant pour $W$ et $X$ deux lettres successives de $\sigma$ qui correspondent à une simplification ($u_j u_j^{-1}$ ou $u_j^{-1} u_j$) du mot sous-jacent. On peut ensuite effacer la paire $YY^{-1}$ créée dans $\mathscr{E}(\sigma)$ sans changer le genre (dans la formule (4), $n$ et $p$ diminuent chacun d'une unité): cela donne un nouveau symbole qui comprend deux lettres de moins que $\sigma$. En épuisant par ce procédé les simplifications successives qui apparaissent dans la réduction de (5), on finit par obtenir un symbole de genre inférieur ou égal à $k$, et *associé à* $\gamma$.

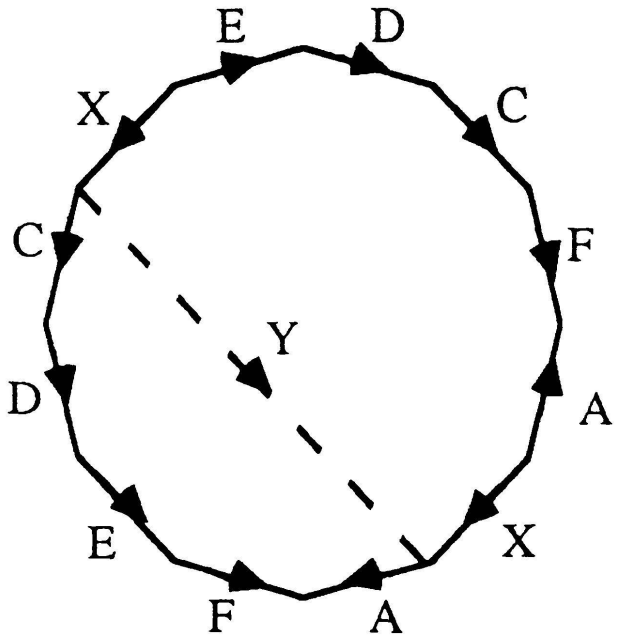
2.5. Pour compléter le théorème 2, il faut signaler que l'algorithme de réduction des symboles (aux symboles canoniques) donne des formules explicites. Par exemple on sait que $c([u, v]^3) = 2$ (voir 1 ou 2.7); voici comment décomposer $[u, v]^3$ en produit de deux commutateurs à partir du symbole $ABA^{-1}CDEFB^{-1}F^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1}$:




$ABA^{-1}CDEFB^{-1}F^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1}$

FIGURE 4

Couper suivant $X$, recoller suivant $B$ [poser $X = ABA^{-1}$, éliminer $B$ par $B^{-1} = A^{-1}X^{-1}A$] (fig. 4).




$XCDEFA^{-1}X^{-1}AF^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1}$

FIGURE 5

Couper suivant $Y$, recoller suivant $A$ [poser $Y = CDEFA^{-1}$, éliminer $A$ par $A = Y^{-1}CDEF$] (fig. 5).

A ce stade, on se trouve avec le symbole $XYX^{-1}Y^{-1}CDEC^{-1}D^{-1}E^{-1}$. On réduit ensuite la partie $CDEC^{-1}D^{-1}E^{-1}$ comme à la figure 2, ce qui donne (voir 2.3):

$$ABA^{-1}CDEFB^{-1}F^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1} = [ABA^{-1}, CDEFA^{-1}]\,[CD, ED]\ .$$

D'où l'identité:

$$[u, v]^3 = [uvu^{-1}, v^{-1}uvu^{-2}]\,[v^{-1}u, vu]\ .$$

## 2.6. CONSÉQUENCES DU THÉORÈME 2

COROLLAIRE 1 ([G-T]). *Pour tout élément* $\gamma$ *de* $L'$, *on a*

$$c(\gamma) \leqslant \frac{1}{4}(\operatorname{long}\gamma)\ ,$$

*où* $\operatorname{long}\gamma$ *est la longueur usuelle de* $\gamma$.

En effet, tout symbole a au moins une classe de sommets! Ce corollaire résulte donc de la formule du genre (4) avec $p \geqslant 1$ et $n = \frac{1}{2}\operatorname{long}\gamma$.

On peut aussi exploiter une majoration du nombre de classes de sommets, moyennant quelques définitions. Remarquons d'abord qu'un symbole $\sigma$ admet une classe à deux sommets si et seulement si il contient un sous-mot $XY$ et son inverse $Y^{-1}X^{-1}$; $\sigma$ sera dit *simple* s'il ne vérifie pas cette condition. Un symbole (orientable) simple est appelé *mot simple alterné* dans la terminologie de [Cu].

Soit $M(A_1, A_2, \ldots)$ un mot réduit en les $A_i (i = 1, 2, \ldots)$. On dit qu'un élément $\gamma$ de $L(u_1, u_2, \ldots)$ est obtenu par *substitution sans simplification* à partir de $M$ s'il existe des mots réduits non vides $m_i (i = 1, 2, \ldots)$ en les $u_j (j = 1, 2, \ldots)$ tels que $M(m_1, m_2, \ldots)$ soit une écriture réduite de $\gamma$.

Enfin, on dira que $\gamma$ est *cycliquement réduit* s'il admet une écriture cycliquement réduite.

COROLLAIRE 2 ([Ed], [Cu]). *Tout élément cycliquement réduit* $\gamma$ *de* $L'$ *est obtenu par substitution sans simplification à partir d'un mot simple alterné de longueur usuelle inférieure ou égale à* $12c(\gamma) - 6$.

*Preuve.* Un symbole $\sigma$ associé à $\gamma$ de genre minimal $c(\gamma)$ se laisse «simplifier» sans changement du genre: il suffit de remplacer autant de fois que c'est nécessaire $XY$ par une nouvelle lettre $Z$ et $Y^{-1}X^{-1}$ par $Z^{-1}$. On produit ainsi un symbole simple $\tau$, et $\sigma$ (donc $\gamma$) est obtenu par substitution sans simplification à partir de $\tau$. Mais $\tau$ n'a pas de classe à un seul élément ($\tau$ est réduit), ni de classe à 2 éléments puisqu'il est simple. Le nombre de classes de sommets de $\tau$ est donc au plus égal à $\frac{1}{3}(\log \tau)$; d'où, d'après (4):

$$\log \tau \leqslant 4c(\gamma) - 2 + \frac{2}{3}(\log \tau) .$$

On en conclut que $\log \tau \leqslant 12c(\gamma) - 6$.

*Exemple* ([Wi]). Un commutateur cycliquement réduit s'obtient par substitution sans simplification à partir de $ABA^{-1}B^{-1}$ ou de $ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$.

Le corollaire 2 a une application intéressante:

PROPOSITION ([Cu]). *Soit* $\gamma \in L'$ *et* $n \in \mathbf{N}^*$. *Alors* $c(\gamma^n) > \frac{n}{6} + \frac{1}{2}$.

En particulier, *la longueur stable des groupes libres est minorée par* $1/6$.

*Preuve.* On peut supposer que $\gamma$ est cycliquement réduit. Tout sous-mot $m$ de $\gamma^n$ dont l'inverse $m^{-1}$ apparaît aussi dans $\gamma^n$ doit vérifier l'inégalité

$\operatorname{long} m < \frac{1}{2}(\operatorname{long}\gamma)$. Sinon, par périodicité cyclique de $\gamma^n$, il existerait un sous-mot non vide $m'$ constituant la fin de $m$ et le début de $m^{-1}$, ce qui est absurde. D'après le corollaire 2, $\gamma^n$ est de la forme $M(m_1, m_2, \ldots)$ avec $\operatorname{long} m_i < \frac{1}{2}(\operatorname{long}\gamma)\,(i = 1, 2, \ldots)$, et l'on a l'inégalité cherchée:

$$n(\operatorname{long}\gamma) = \operatorname{long}\gamma^n < \frac{1}{2}\operatorname{long}\gamma\,(12c(\gamma^n) - 6)\ .$$

## 2.7. Où l'on retrouve $c([u, v]^N) = E(N/2) + 1$

Pour illustrer encore le théorème 2, appliquons l'algorithme à notre exemple favori: $[u, v]^N (N \in \mathbf{N}^*)$.

Soit $\sigma$ un symbole de la forme (3); une classe comprenant $k$ sommets ($k \in \mathbf{N}^*$) est repérée dans $\sigma$ par

$$X_1 X_2^{-1}\ X_2 X_3^{-1}\ \ldots\ X_k X_1^{-1}$$

(non forcément dans cet ordre) où les $X_i (i = 1, \ldots, k)$ appartiennent à l'ensemble $\{A_1, A_1^{-1}, \ldots, A_n, A_n^{-1}\}$. Ainsi, en examinant la succession des lettres dans $[u, v]^N$, on voit que toute classe de sommets d'un symbole associé à $[u, v]^N$ doit avoir au moins 4 éléments. Un tel symbole admet donc au plus $N$ classes de sommets; compte tenu de la formule du genre (4), on en déduit l'inégalité:

$$c([u, v]^N) \geqslant E(N/2) + 1\ .$$

Par ailleurs on construit facilement un symbole de genre $E(N/2) + 1$ associé à $[u, v]^N$. Il suffit de le faire pour $N$ *impair*. Considérons le polygone à $4N$ côtés disposé comme suit (fig. 6):

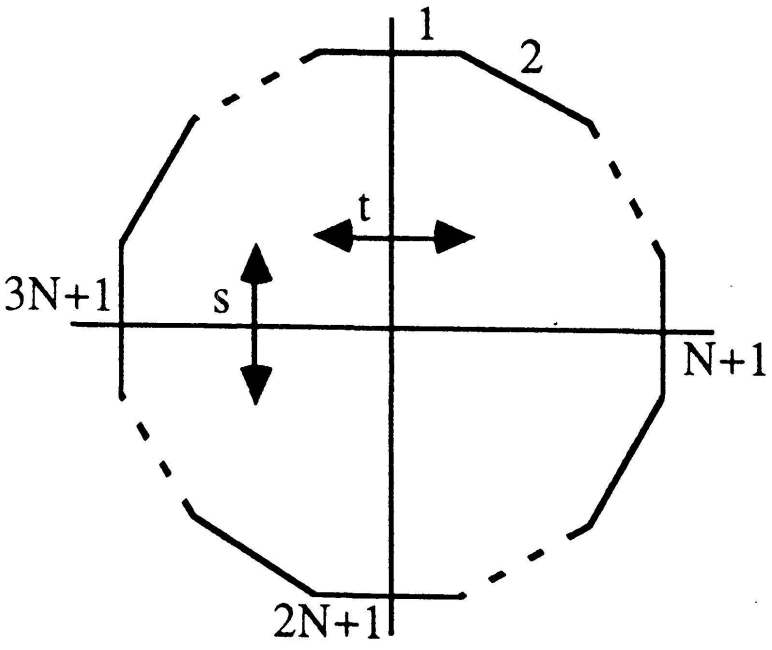



FIGURE 6

Les côtés étant numérotés comme sur la figure 6, identifions ceux qui sont impairs (resp. pairs) au moyen de la symétrie $s$ (resp. $t$) d'axe horizontal (resp. vertical). Les classes de sommets sont les orbites de l'action des symétries $s$ et $t$ sur les sommets: elles ont toutes 4 éléments. Le genre du symbole ainsi défini est donc $\frac{1}{2}(N+1)$. De plus, il est associé à $[u, v]^N$ comme on le vérifie en écrivant ce mot autour du polygone.

## 2.8. Le nombre minimal de carrés

On s'intéresse ici aux produits de carrés, ce qui est naturel puisqu'ils admettent la même interprétation topologique que les produits de commutateurs (voir 1.2), au moyen de surfaces *non orientables.*

Soit $L = L(u_1, u_2, \ldots)$ un groupe libre et $L^2$ le sous-groupe de $L$ engendré par les carrés. Il convient de remarquer que $L^2$ contient $L'$ car tout commutateur est un produit de carrés:

$$[X, Y] = X^2(X^{-1}Y)^2Y^{-2}\,. \tag{6}$$

Un élément $\gamma$ de $L$ appartient donc à $L^2$ si et seulement si pour chaque générateur $u_j$, la somme des exposants de $u_j$ dans l'écriture de $\gamma$ est paire.

Les symboles considérés dans ce paragraphe seront quelconques: orientables ou non orientables. La *caractéristique d'Euler-Poincaré* d'un symbole $A_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots A_{i_{2n}}^{\varepsilon_{2n}}$ est par définition celle de la surface associée, i.e.:

$$\chi = 1 + p - n$$

où $p$ désigne comme d'habitude le nombre de classes de sommets.

Pour tout élément $\gamma$ de $L^2$, notons $\square(\gamma)$ le nombre minimal de carrés nécessaires pour exprimer $\gamma$. La méthode des paragraphes précédents permet de retrouver simplement le résultat ci-dessous ([Cu]; voir aussi [G-T]):

Théorème 2′. *Soit $\gamma$ un élément de $L^2$ et $\chi(\gamma)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré maximale des symboles associés à $\gamma$. Deux éventualités sont possibles:*

1) *S'il existe un symbole associé $\sigma$ non orientable avec $\chi(\sigma) = \chi(\gamma)$, alors*

$$\square(\gamma) = 2 - \chi(\gamma)\,.$$

2) *Sinon* $\square(\gamma) = 3 - \chi(\gamma) = 2c(\gamma) + 1$.

*Exemples.*

1) Quand $\gamma$ appartient à $L^2 - L'$, on est toujours dans le premier cas; par exemple $\square(u_1^2 \dots u_k^2) = k \quad (k \in \mathbf{N}^*)$ ([L-N]).

2) Au contraire, si $\gamma$ est un symbole orientable, alors $\square(\gamma) = 2c(\gamma) + 1$; ainsi $\square([u_1, v_1] \dots [u_k, v_k]) = 2k + 1$ dans $L(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k)$ ([L-S] p. 56).

*Preuve du théorème 2'.*

Tout symbole non orientable $\sigma = A_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots A_{i_{2n}}^{\varepsilon_{2n}}$ est équivalent, par découpage et recollement, au symbole $X_1 X_1 \dots X_k X_k$ où $k = 2 - \chi(\sigma)$ ([Ma 1]). On en déduit (voir 2.4) que $\sigma$ est le produit de $k$ carrés dans $L(A_1, \dots, A_n)$.

Considérons maintenant un symbole $\sigma \in L(A_1, \dots, A_n)$ orientable de genre $g(\sigma)$, et posons $\tilde{\sigma} = A_0 A_0 \sigma \in L(A_0, A_1, \dots, A_n)$. On constate que $\chi(\tilde{\sigma}) = \chi(\sigma) - 1 = 1 - 2g(\sigma)$. D'après ce qui précède et en faisant $A_0 = 1$, on voit que le symbole $\sigma$ est le produit de $2g(\sigma) + 1$ carrés de $L(A_1, \dots, A_n)$.

*Exemple.* $AABCB^{-1}C^{-1} = (A^2BA^{-1})^2(AB^{-1}A^{-1}CA^{-1})^2(AC^{-1})^2$

C'est le célèbre homéomorphisme $\mathbf{P} \# \mathbf{T} \approx \mathbf{P} \# \mathbf{P} \# \mathbf{P}$ où $\mathbf{P}$ est le plan projectif, $\mathbf{T}$ le tore et $\#$ la somme connexe. On a en particulier la formule (6) en faisant $A = 1$. Inversement, le même homéomorphisme permet de réécrire un produit de 3 carrés comme produit d'un carré et d'un commutateur:

$$X^2Y^2Z^2 = (X^2Y^2ZY^{-1}X^{-1})^2[XY, Z^{-1}Y^{-1}] .$$

On a clairement les majorations cherchées: $\square(\gamma)$ est majoré par $2 - \chi(\gamma)$ dans le premier cas du théorème 2', et par $3 - \chi(\gamma)$ dans le second. Il faut maintenant construire un symbole associé à $\gamma$ à partir d'une décomposition en carrés: $\gamma = a_1^2 \dots a_k^2$ $(a_i \in L(a_1, a_2, \dots))$.

Comme à la preuve du théorème 2, on commence par remplacer tous les $u_j$ et les $u_j^{-1}$ de l'écriture réduite de chaque $a_i$ par des lettres deux à deux distinctes:

$$a_1 \to AB \dots EF,\ a_2 \to GH \dots KL, \text{ etc.}$$

Puis en développant les carrés, on obtient un symbole

$$AB \dots EFAB \dots EFGH \dots KLGH \dots KL \dots \tag{7}$$

dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à $2 - k$. On doit ensuite étendre la transformation $\mathscr{C}$ de 2.4 aux symboles non orientables, mais cette fois-ci il faut tenir compte du mot sous-jacent et il y a trois cas possibles ($u = u_j$ ou $u_j^{-1}$):

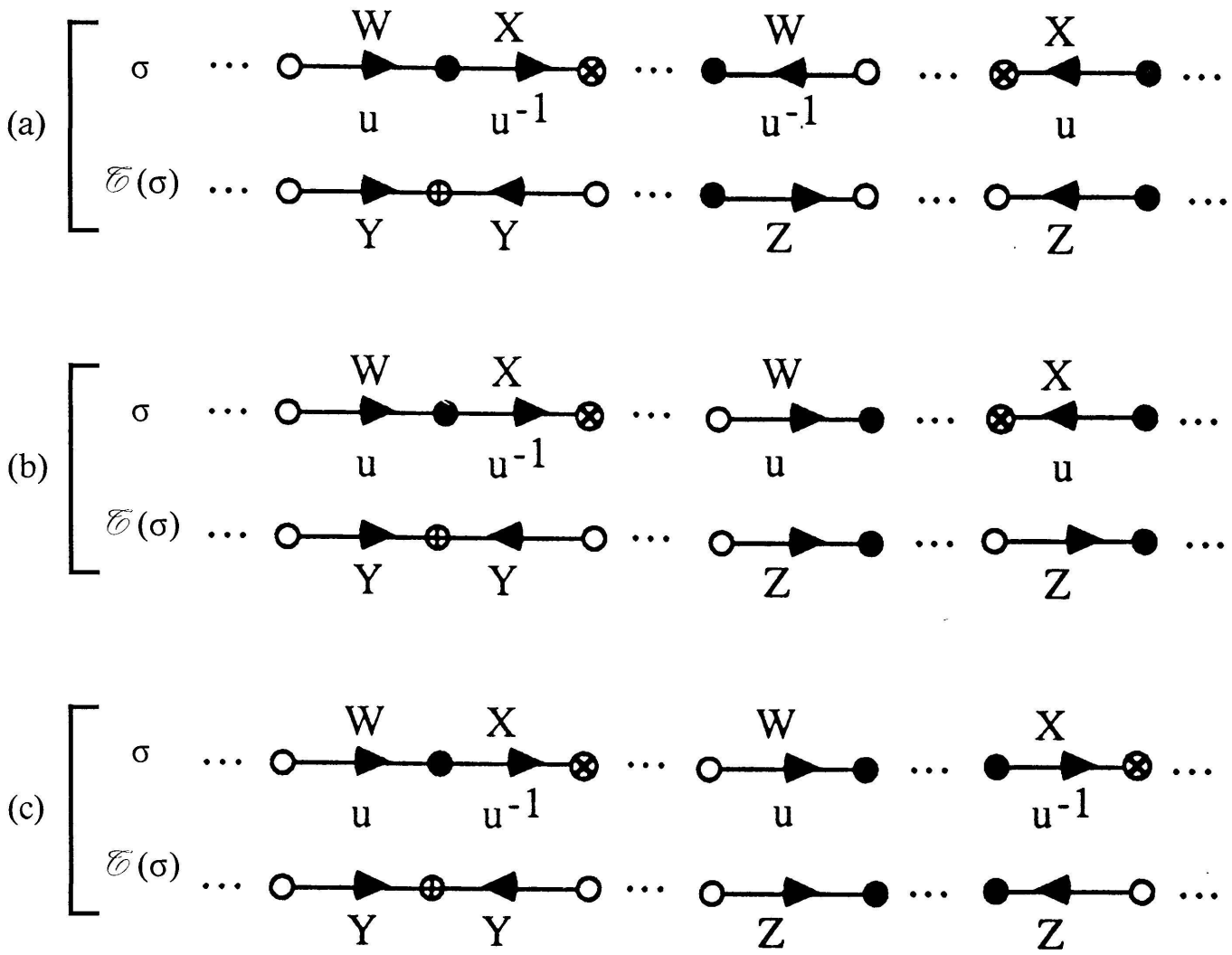



FIGURE 7

Le premier cas est celui de la figure 3: c'est le seul qui intervient quand les symboles sont orientables. En examinant la figure 7, on voit que $\mathscr{E}$ ne diminue pas le nombre de classes de sommets (même démonstration que pour l'affirmation de 2.4), donc

$$\chi(\mathscr{E}(\sigma)) \geqslant \chi(\sigma) .$$

Cependant, la transformation $\mathscr{E}$ possède une propriété supplémentaire qui sera cruciale pour la suite de la démonstration:

*Affirmation.* Si $\sigma$ est non orientable et si $\mathscr{E}(\sigma)$ est orientable, alors

$$\chi(\mathscr{E}(\sigma)) \geqslant \chi(\sigma) + 1 .$$

Le passage de non orientable à orientable n'est possible que dans le cas (c) de la figure 7. L'identification des deux sommets $\otimes$ de la figure 7-(c) nécessite deux arêtes orientées dans le même sens (autres que les $X$). Comme par

hypothèse $\mathscr{E}(\sigma)$ est orientable, les arêtes $W$ doivent donc intervenir pour identifier les sommets $\otimes$: on constate alors que les classes $\otimes$ et $\bigcirc$ sont forcément confondues. Finalement, $\mathscr{E}(\sigma)$ comprend une classe de plus que $\sigma$ (que les classes $\bigcirc$ et $\bullet$ soient distinctes ou non).

Achevons maintenant la preuve du théorème 2′. A partir du symbole (7) ci-dessus on trouve (par le même procédé qu'en 2.4) un symbole $\sigma$ associé à $\gamma$ et vérifiant

$$\chi(\gamma) \geqslant \chi(\sigma) \geqslant 2 - k\,,$$

d'où $k \geqslant 2 - \chi(\gamma)$.

Cela prouve le théorème dans l'éventualité où $\chi(\gamma)$ est réalisé par un symbole non orientable, puisqu'on a déjà $\square(\gamma) \leqslant 2 - \chi(\gamma)$ dans ce cas. Dans l'autre cas, ou bien $\sigma$ est non orientable et on a l'inégalité stricte $\chi(\gamma) > \chi(\sigma)$, ou bien $\sigma$ est orientable et d'après l'affirmation précédente $\chi(\sigma) > 2 - k$; donc finalement $k \geqslant 3 - \chi(\gamma)$, et le théorème 2′ est démontré.

Pour terminer, il faut mentionner les analogues des corollaires 1 et 2 (§ 2.6).

COROLLAIRE 1′ ([G-T]). *Pour tout élément* $\gamma$ *de* $L^2$, *on a*

$$\square(\gamma) \leqslant \frac{1}{2}\,(\operatorname{long}\gamma) + 1$$

*(et même* $\square(\gamma) \leqslant \frac{1}{2}(\operatorname{long}\gamma)$ *si* $\gamma \in L^2 - L'$*).*

Un symbole est simple s'il ne contient pas deux exemplaires d'un sous-mot $XY$, ni $XY$ et son inverse. A l'exception du symbole $AA$, les classes de sommets d'un symbole simple ont au moins 3 éléments. Un *mot simple quadratique* est un symbole simple.

COROLLAIRE 2′ ([Ed], [Cu]). *Tout élément cycliquement réduit* $\gamma$ *de* $L^2$ *tel que* $\square(\gamma) \geqslant 2$ *est obtenu par substitution sans simplification à partir d'un mot simple quadratique de longueur usuelle inférieure ou égale à* $6\square(\gamma) - 6$.

Les preuves des corollaires 1′ et 2′ sont identiques à celles des corollaires 1 et 2 (§ 2.6).

*Remarque sur l'identité (6).* Certains commutateurs sont produits de 2 carrés seulement (exemple: $[u, v^2] = (uvu^{-1})^2 v^{-2}$). Mais on peut montrer à l'aide du corollaire 2 (2.6) qu'un commutateur non trivial n'est jamais un carré dans un groupe libre.