

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LONGUEUR STABLE DES COMMUTATEURS  
**Autor:** Bavard, Christophe  
**Kapitel:** Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58734>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## LONGUEUR STABLE DES COMMUTATEURS

par Christophe BAVARD

### INTRODUCTION

A tout groupe  $\Gamma$  on associe classiquement son groupe dérivé  $\Gamma'$ : c'est le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par l'ensemble des commutateurs  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$  ( $x, y \in \Gamma$ ). Un élément donné  $\gamma$  de  $\Gamma'$  est de plusieurs façons possibles le produit de commutateurs. On appellera *longueur des commutateurs* de  $\gamma$  le nombre minimal de commutateurs nécessaires pour exprimer  $\gamma$ ; cet entier sera noté  $c_\Gamma(\gamma)$  ou simplement  $c(\gamma)$ .

En 1975, C. Edmunds a montré que la longueur des commutateurs est effectivement calculable dans les groupes libres [Ed] (voir aussi [Gr 1] p. 212). Un peu plus tard, R. Goldstein et E. Turner [G-T], ainsi que M. Culler [Cu] retrouvaient ce résultat en s'appuyant sur la topologie des surfaces; on propose dans la partie 2 une version élémentaire de leurs algorithmes. En particulier la propriété suivante ([Cu]) répond à une question de M. Newman ([Ne]): dans le groupe libre à deux générateurs  $u$  et  $v$

$$(1) \quad c([u, v]^n) = E(n/2) + 1 \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

où  $E$  est la partie entière. Par exemple  $[u, v]^3$  est le produit de deux commutateurs seulement, comme le prouve l'identité remarquable ([Cu])

$$[u, v]^3 = [uvu^{-1}, v^{-1}uvu^{-2}] [v^{-1}uv, v^2] .$$

Il est intéressant d'étudier le comportement global de la longueur des commutateurs; on peut en particulier se demander si, pour un groupe donné  $\Gamma$ , cette fonction est bornée sur  $\Gamma'$ . Posons

$$c(\Gamma) = \sup\{c(\gamma); \gamma \in \Gamma'\} .$$

Pour le groupe libre à deux générateurs, on a  $c = \infty$  (cela résulte, par exemple, de (1)). Cette quantité a été très étudiée pour les groupes linéaires des anneaux commutatifs, ainsi  $c(SL_2(\mathbf{Z})) = \infty$  tandis que  $c(SL_n(\mathbf{Z})) < \infty$  si  $n \geq 3$  ([Ne]); voir [D-V] pour de nombreuses références. Par ailleurs S. Matsumoto et S. Morita ont montré que  $c(\Gamma)$  peut contenir une information sur la

cohomologie bornée à valeurs réelles de  $\Gamma$  notée  $H_b^*(\Gamma, \mathbf{R})$ : si  $\Gamma$  est uniformément parfait (i.e.  $\Gamma' = \Gamma$  et  $c(\Gamma) < \infty$ ) alors l'application naturelle  $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R})$  est injective ([M-M]). Rappelons que  $H_b^*(\Gamma, \mathbf{R})$  est l'homologie du complexe

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \xrightarrow{d=0} C_b^1(\Gamma) \xrightarrow{d} C_b^2(\Gamma) \rightarrow \dots$$

où  $C_b^n(\Gamma)$  désigne l'espace des fonctions bornées de  $\Gamma^n$  dans  $\mathbf{R}$ , avec pour  $f \in C_b^n(\Gamma)$  ( $n \geq 1$ ) la formule habituelle:

$$df(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_2, \dots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_n).$$

Afin de préciser cette relation entre commutateurs et cohomologie bornée on définit la *longueur stable* d'un élément  $\gamma$  dans  $\Gamma'$ :

$$\|\gamma\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(\gamma^n)}{n}.$$

Il faut noter que d'après l'inégalité

$$c(\gamma_1 \gamma_2) \leq c(\gamma_1) + c(\gamma_2) \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma')$$

la suite  $c(\gamma^n)$  est sous-additive, donc la limite ci-dessus existe (voir [P-S, partie I, exercice 99]). Cela étant, on établira le

**THÉORÈME.** *L'application  $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R})$  est injective si et seulement si la longueur stable est nulle sur  $\Gamma'$ .*

La connaissance de  $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$  nous renseigne donc sur la longueur stable: celle-ci est toujours nulle pour un groupe moyennable (par exemple résoluble) puisque sa cohomologie bornée est triviale ([Gr 2] ou [Iv]).

Le noyau de  $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R})$  est de codimension finie pour une large classe de groupes intéressants, tels que les groupes fondamentaux de polyèdres compacts. Quand la longueur stable est nulle, on voit donc que l'espace  $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$  est «petit».

C'est la notion de *quasi-morphisme* qui relie commutateurs et cohomologie bornée. Une application  $f: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$  est un *quasi-morphisme* si  $f(xy) - f(x) - f(y)$  est borné ( $x, y \in \Gamma$ ). D'une part, la donnée d'une telle application permet de minorer la longueur des commutateurs, selon une méthode qui remonte à Milnor [Mil] (voir 1.1); d'autre part les quasi-morphismes décrivent le noyau de  $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbf{R})$  puisque

$f(xy) - f(x) - f(y)$  est le cobord de  $f$ . En fait ce noyau est isomorphe par le cobord à l'espace  $K$  des quasi-morphismes *homogènes*  $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$  (i.e.  $\varphi(x^n) = n\varphi(x)$ ,  $x \in \Gamma$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ) définis à l'addition d'un morphisme près (voir [Be] ou 3.3). La longueur stable apparaît alors comme une version duale d'une norme naturelle sur  $K$ :

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi([x, y])|; x, y \in \Gamma\}.$$

Plus précisément:

THÉORÈME DE DUALITÉ. *Pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma'$  on a la relation*

$$\|\gamma\| = \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in K} \frac{|\varphi(\gamma)|}{\|\varphi\|}.$$

Ce résultat met en évidence la longueur stable comme une quantité naturelle du point de vue de la cohomologie bornée, puisqu'elle est déterminée par les quasi-morphismes. La longueur des commutateurs, quant à elle, est seulement *minorée* par les quasi-morphismes (voir 1.1).

Cet article comprend trois parties. La première contient une preuve élémentaire de la formule (1) ainsi qu'une petite généralisation. Dans la partie 2, on détermine la longueur des commutateurs dans les groupes libres; on y considère également les produits de carrés car ils s'interprètent topologiquement comme les produits de commutateurs (par des surfaces). Enfin, la troisième partie est consacrée à l'étude de la longueur stable; on décrit le phénomène de dualité avec la cohomologie bornée et les propriétés qui en découlent.

Je remercie Etienne Ghys pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Il m'a expliqué que le genre des classes d'homologie de dimension 2 ([B-G]) s'interprète comme nombre minimal de commutateurs. J'ai apprécié sa disponibilité et ses judicieux conseils.

## 1. LONGUEUR DE $[u, v]^n$ .

L'objectif de cette partie est d'établir le théorème suivant, qui généralise la relation (1) de l'introduction:

THÉORÈME 1. *Dans le groupe libre à  $2k$  générateurs ( $k \in \mathbf{N}^*$ )*

$$u_i, v_i \quad (i = 1, \dots, k)$$